Como proceder para obter-se as equações de Maxwell no Sistema Internacional (SI)?

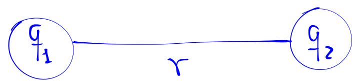
$\Longrightarrow$ Os passos são similares; a diferença está em:

1) Como se define a unidade de carga elétrica; se define-se pela eletrostática ou pela eletrodinâmica.

2) Uma vez escolhido o experimento através do qual a unidade de carga será definida, estabelecer se serão utilizadas constantes de proporcionalidade através das quais a unidade de carga poderá assumir intensidade qualquer bem com um nome qualquer (Ex: 1 Ampere × 1 segundo = 1 Coulomb). O nome escolhido passa a representar uma nova unidade fundamental.

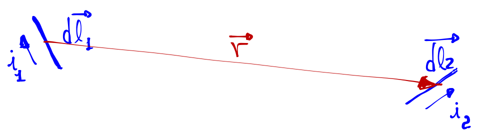
A fim de estabelecermos as relações fundamentais de forma mais geral, vamos impor as relações de proporcionalidades como segue:

Para a força elétrica estática:



$$\vec{F}_e = \frac{K_e\, q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}$$

Para a força entre elementos de corrente elétrica:



A força no elemento $\vec{dl}_2$ devida ao elemento $\vec{dl}_1$ (também i_1, i_2) acontece na forma:

$$\vec{F}_{21} \propto \frac{i_1 i_2\, \vec{dl}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \hat{r})}{r^2}$$

ou $$\vec{F}_M = \frac{K_M\, i_1 i_2\, \vec{dl}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \hat{r})}{r^2}$$

Podemos então escolher se nosso sistema de unidades será do tipo eletrostático, baseado na relação $\vec{F}_e$; ou se será do tipo eletrodinâmico, baseado na relação para $\vec{F}_M$.

O SI é baseado no experimento dinâmico (correntes). A unidade de carga elétrica é definida a partir da relação

$$\vec{F}_M = \frac{K_M\, i_1 i_2\, \vec{dl_2} \times (\vec{dl_1} \times \hat{r})}{r^2}.$$

Na verdade o experimento é realizado impondo-se condições de força e distância entre dois fios longos paralelos atravessados por uma corrente i.

Mas qual é a força entre fios paralelos ?

A relação acima representa a força em um elemento $\vec{dl_2}$ devida a um elemento $\vec{dl_1}$.

Num primeiro passo, vamos obter a força em $\vec{dl_2}$ devido a um fio longo. Assim a força será a soma de muitos $dl_{s,1}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_M = \int_{\vec{dl_1}} \frac{K_M\, i_1 i_2\, \vec{dl_2} \times (\vec{dl_1} \times \hat{r})}{r^2}$$

$$\vec{F}_M = i_2\, \vec{dl_2} \times \left[K_M \int \frac{i_1\, \vec{dl_1} \times \hat{r}}{r^2} \right]$$

* A parte entre colchetes só possui relação com o fio 1 $(\vec{dl_1}, i_1)$ e com a distância do elemento $\vec{dl_2}$ ao fio 1. Adicionalmente, a constante K_M é acoplada a este fator com o objetivo de representar, possivelmente, o efeito do ambiente onde $\vec{dl_2}$ está situado.

$\Rightarrow$ Podemos dizer (definir) que este fator corresponde ao efeito sentido por $\vec{dl_2}$ quando colocado naquele ponto do espaço (naquela posição relativa a $\vec{dl_1}$). Em outras palavras, ao campo magnético sentido por $\vec{dl_2}$.

Portanto:

$$\vec{B} \equiv K_M \int \frac{i_1 \, \vec{dl_1} \times \hat{r}}{r^2}$$

Segue que: $\vec{F}_M = i_2 \, \vec{dl_2} \times \vec{B}$

Note que $i_2 = \dfrac{q}{dt} \implies \vec{F}_M = q \, \dfrac{\vec{dl_2}}{dt} \times \vec{B}$

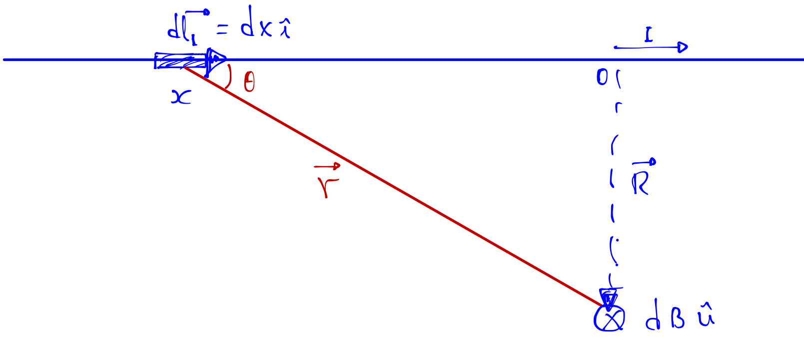
Como $\dfrac{\vec{dl_2}}{dt}$ = velocidade da carga q dento do fio $\underline{2}$ que sente a força

$$\boxed{\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B}}$$

Note que aqui a constante magnética (K_M) está implícita dentro de $\vec{B}$, diferentemente do sistema eletrostático Gaussiano.

Vamos então utilizar o campo $\vec{B}$ devido a um fio longo. Este cálculo já foi realizado quando tratamos do sistema Gaussiano.

De forma similar à realizada antes, no sistema eletrostático, vamos realizar uma integração de retilíneo infinito um fio:



"$\hat{u}$ = unitário entrando na página"

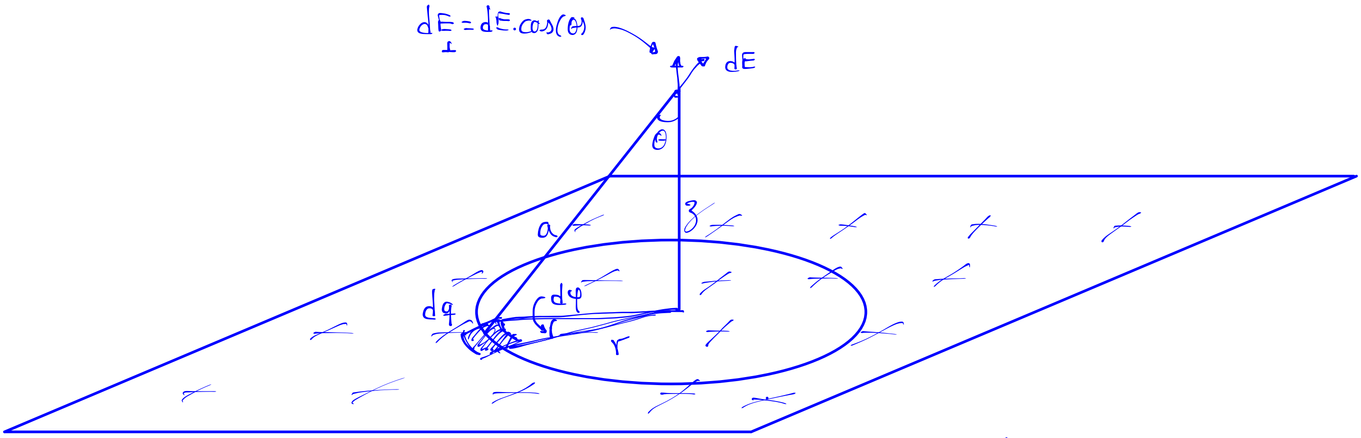
Obs: Para que o fio seja considerado longo e retilínio precisamos apenas que $\vec{R}$ seja suficientemente pequeno tal que o fio seja percebido longo e retilíneo visto do ponto em questão.

Como antes, resulta que

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = 4\pi K_\mu I$$

"$I \equiv i_1$ $\Longrightarrow$ Corrente no fio responsável por $\vec{B}$".

E ao considerarmos o campo gerado entre as placas de um capacitor:



$\Rightarrow$ $dE = \dfrac{K_e\, dq}{a^2}$, para um anel podemos considerar apenas a componente perpendicular $dE_\perp$, pois as componentes paralelas ao plano cancelam-se mutuamente.

$\Rightarrow$ Que difere do sistema eletrostático Gaussiano apenas pela presença da constante K_e. O resultado é, portanto:

$$\Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \underbrace{\frac{1}{4\pi K_e}\cdot\frac{d(AE)}{dt}}$$

"Como o lado esquerdo é a corrente real dq/dt, este termo representa a corrente virtual entre as placas I_D"

Significa que o termo $\dfrac{1}{4\pi K_e}\dfrac{d}{dt}(\phi_E)$ pode substituir o termo de corrente em

$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = 4\pi K_\mu I$, quando em uma região com campo elétrico variável.

Temos então que

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = 4\pi K_\mu I + \cancel{4\pi} K_\mu \cdot \frac{1}{\cancel{4\pi} K_e}\frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 4\pi K_\mu I + \frac{K_\mu}{K_e}\frac{d\phi_E}{dt}$$

— // —

Finalmente, utilizando a relatividade do tipo de campo observado (veja nos exemplos dos pesquisadores João e Maria realizado durante a elaboração do sistema Gaussiano), resulta que

$$\vec{F}_{e,\,induzida} = \vec{F}_{magnética}$$ "dependendo do referencial".

$$\vec{E}\cdot q = q\vec{U}\times\vec{B}$$ "Note que aqui a força magnética não traz uma constante K_μ explícita. A constante está dentro do $\vec{B}$."

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{U}\times\vec{B}.$$

Segue, repetindo o procedimento realizado no sistema Gaussiano, onde tínhamos $\vec{E} = K_\mu \vec{U}\times\vec{B}$, que o resultado é o mesmo bastando eliminarmos a constante K_μ na expressão final.

$$\Rightarrow \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\phi_B).$$

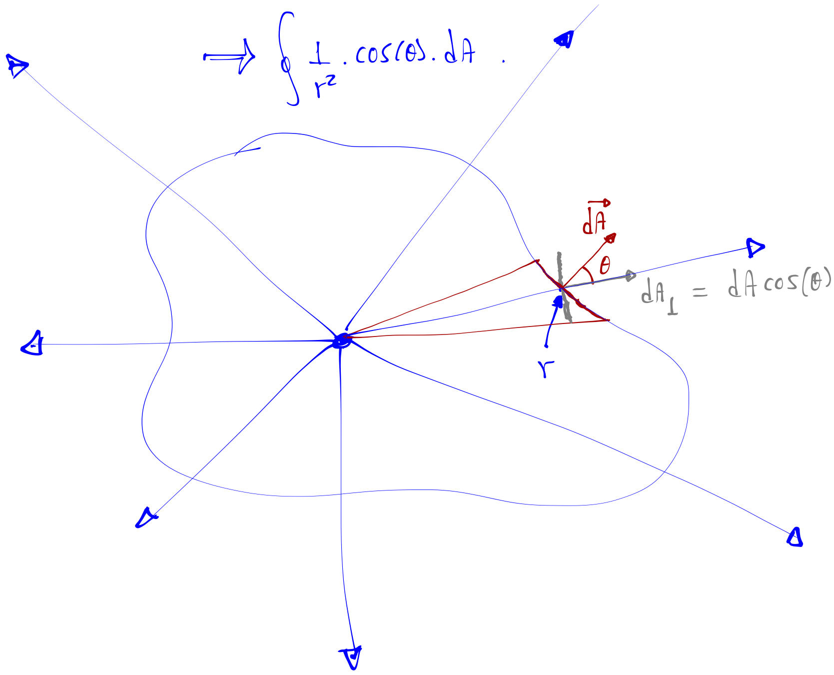
Para o fluxo elétrico temos que

$$\vec{E} = \frac{K_e q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA = K_e q \underbrace{\oint_S \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\hat{m}\,dA}$$

Através de uma superfície que envolve q.

$$\Longrightarrow \oint \frac{1}{r^2}\cdot\cos(\theta)\cdot dA \;.$$



A integral acima pode ser escrita como

$$\oint_S \frac{dA_\perp}{r^2} \quad ; \quad \text{ma} \quad dA_\perp = r\,d\theta \cdot r\,\text{sen}(\theta)\,d\varphi \quad \text{"em esféricas"}$$

$$= \oint_S \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\hat{m}\,dA = \oint \frac{1}{\cancel{r^2}}\cdot \cancel{r^2}\,\text{sem}(\theta)\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi} \text{sem}(\theta)\,d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$\oint_{r^2} \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\hat{m}\,dA = 2\pi\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi}$$

$$\oint_S \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\hat{m}\,dA = -2\pi\Big(\cos(\pi) - \cos(0)\Big) = -2\pi\Big(-1-1\Big) = 4\pi$$

$\llcorner$ ângulo sólido.

Portanto,

$$\boxed{\oint_c \vec{E}\cdot\vec{dA} = 4\pi K_e \cdot q \,.}$$

As equações de Máxwell podem ser escritas nas formas

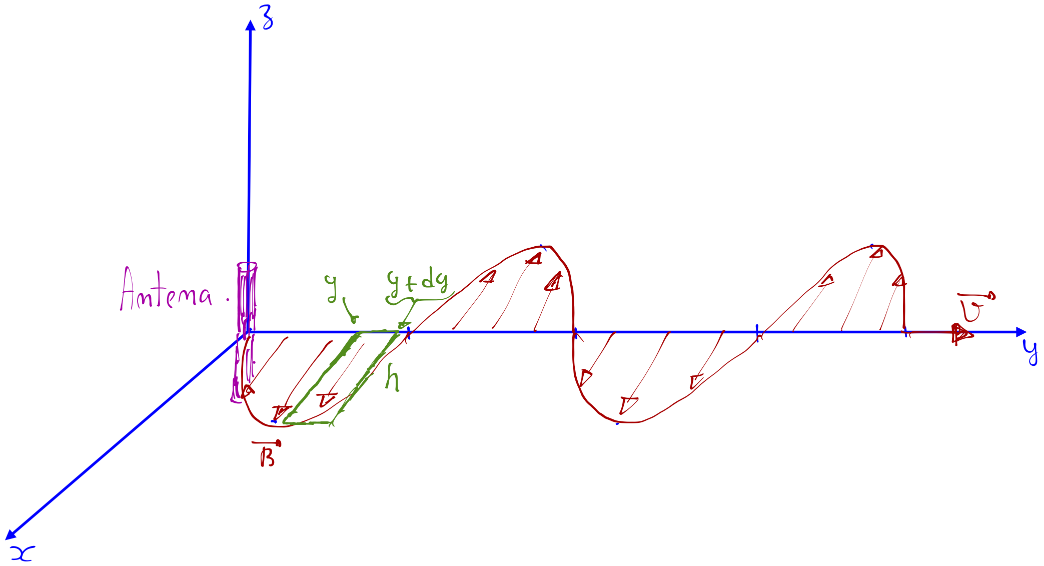
$$\begin{cases} \oint_s \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = 4\pi K_e q \\[2ex] \oint_s \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = 0 \\[2ex] \oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = 4\pi K_\mu I + \dfrac{K_M}{K_e}\dfrac{d\phi_E}{dt} \\[2ex] \oint_c \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\dfrac{d\phi_B}{dt} \end{cases}$$

Como antes, as equações de onda para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser obtidas das equações de indução no espaço vazio $(I = 0)$.

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{K_M}{K_e}\frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt} \,.$$

Procedendo como antes, segue que:



Aplicar $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{K_M}{K_e}\frac{d\phi_E}{dt}$

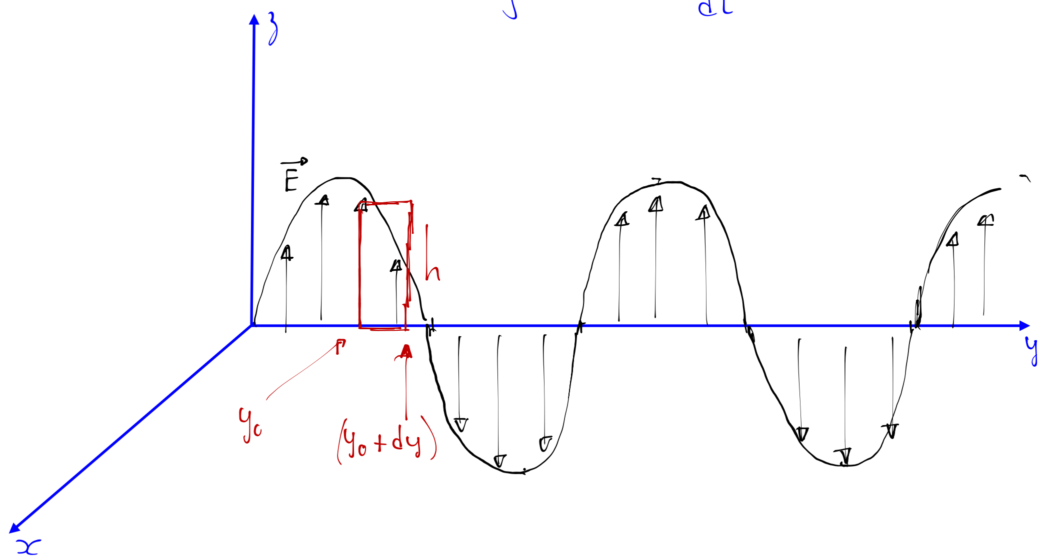
$\Rightarrow \quad \phi_E = E.h.dy$

e $\quad \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(y).h - (B(y)+dB).h = -dB.h$

$$\Rightarrow \frac{K_M}{K_e}\frac{d}{dt}(E\cancel{h}dy) = -dB\cancel{h}$$

$$\underline{\frac{dB}{dy} = -\frac{K_M}{K_e}\frac{dE}{dt}}$$

Por outro lado, aplicando $\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$



$$\Rightarrow \phi_B = B.h.dy$$

$$\text{e} \oint \vec{E}.\vec{dl} = E(y).h - (E(y)+dE).h = -dEh$$

$$\Rightarrow -dEh = -\frac{d}{dt}(Bhdy)$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{dE}{dy} = -\frac{dB}{dt}}$$

Resumindo:

$$\frac{dB}{dy} = -\frac{K_M}{K_e}\frac{dE}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dy} = -\frac{dB}{dt} \qquad (2)$$

de (1) $\dfrac{\partial^2 B}{\partial t \partial y} = -\dfrac{K_M}{K_e}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

de (2) $\dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 B}{\partial y \partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 B}{\partial y \partial t} = -\dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} \to$ isso em

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{K_M}{K_e}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

Trata-se de uma equação de onda com velocidade

Obs: Na solução do sistema Gaussiano tínhamos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = K_M^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Obtivemos que a velocidade da onda é $v = 1/K_M$

Por comparação:

$$\Longrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{K_m/K_e}}.$$

No sistema SI define-se $K_e \equiv 1/4\pi\epsilon_0$ e $K_m = \mu_0/4\pi$; onde o índice zero refere-se à experimentos realizados no vácuo.

Portanto:

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = 4\pi K_e q = \frac{\cancel{4\pi} q}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} = q/\epsilon_0$$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = 4\pi k_m I + \frac{K_m}{K_e}\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{4\pi \mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = 0$$

Resumindo, no SI

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = q/\epsilon_0$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = 0$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d\phi_E}{dt};$$

Com $c = \sqrt{\frac{K_e}{K_m}} = \sqrt{\frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}\cdot\frac{\cancel{4\pi}}{\mu_0}}$

$\Longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ é a velocidade da onda eletromagnética.

Forma Diferencial das Equações de Maxwell

A forma integral das equações de Maxwell do eletromagnetismo têm muita utilidade na aplicação desta teoria em projetos eletromagnéticos com certo grau do simetria. Contudo, como é comum nos estudos físicos , é útil termos uma representação destas equações num formato mais generalizado (independente de simetrias específicas). Este formato é, invariavelmente (não só no eletromagnetismo), colocado numa forma diferencial.

Mas o que representa um formato diferencial?

$\Longrightarrow$ Um equação no formato diferencial representa o comportamento de uma grandeza física (ou uma relação entre grandezas físicas) em um elemento de: (i) Volume ; (ii) de área ; (iii) de tempo ; (iv) comprimento ; (v) etc...

Em outras palavras, relacionam como as grandezas físicas variam por unidade de variação de outras grandezas.

Definição da forma diferencial para:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi q$$

Vamos chamar, por motivos "óbvios" de divergente de Campo elétrico a seguinte relação:

$$\text{diver.}\left(\vec{E}\right) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V}\left(4\pi q\right)$$

$$\text{diverg.}\left(\vec{E}\right) = 4\pi \lim_{V \to 0} \left(\frac{q}{V}\right)$$

$$\Rightarrow \text{diverg.}\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho$$, onde ρ = densidade volumétrica de carga elétrica.

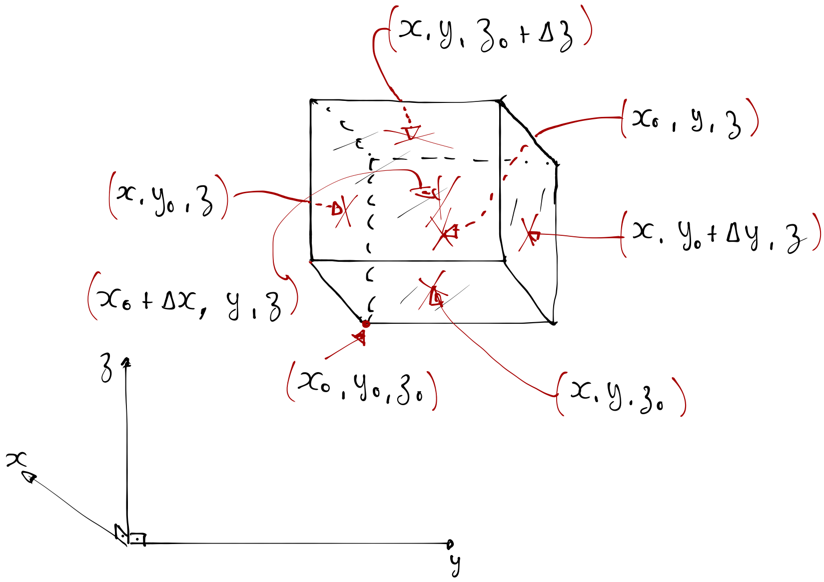
Então, por definição:

$$\text{diverg.}(\vec{E}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Vamos investigar melhor o que representa a quantidade pontual $\lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$.

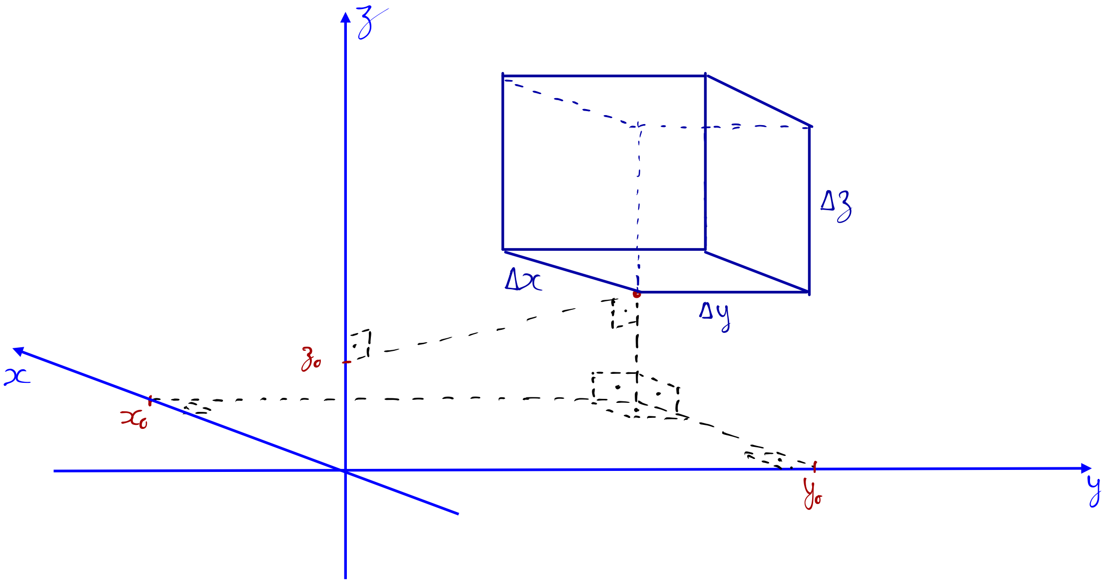
Vamas desemvolver este limite para o caso onde $\underline{V}$ e $\underline{d\vec{A}}$ são expressos em coordenadas retangulares:

$V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$
$d\vec{A} = \hat{n}\, dA$ "$\hat{n}$ = vetor unitário normal à dA."



Obs: As coordenadas com índices zero (x_0, y_0, z_0) são fixas. As coordenadas sem o índice zero $(x, y$ e $z)$ são livres. Significa, por exemplo, para (x_0, y, z) que y e z estão livres para assumirem todos os pontos da superfície de trás da caixa.

A caixa acima corresponde a um elemento de volume no formato retangular, com um vértice fixado em um ponto (x_0, y_0, z_0) qualquer do espaço. A nova ilustração abaixo deve ajudar melhor na visualização.



O que temos a fazer é calcular o fluxo de uma função vetorial através da caixa fechada $\left[\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA\right]$ e depois tomar o limite com $V \longrightarrow$ zero.

ϕ_1 = Fluxo pela superfície $(x_0, y, z) \Rightarrow \quad -\int_S F_x(x_0, y, z)\,dy\,dz$

ϕ_2 = " " " $(x, y_0, z) \Rightarrow \quad -\int_S F_y(x, y_0, z)\,dx\,dz$

ϕ_3 = " " " $(x, y, z_0) \Rightarrow \quad -\int_S F_z(x, y, z_0)\,dx\,dy$

ϕ_4 = " " " $(x_0+\Delta x, y, z) \Rightarrow \quad \int_S F_x(x_0+\Delta x, y, z)\,dy\,dz$

ϕ_5 = " " " $(x, y_0+\Delta y, z) \Rightarrow \quad \int_S F_y(x, y_0+\Delta y, z)\,dx\,dz$

ϕ_6 = " " " $(x, y, z_0+\Delta z) \Rightarrow \quad \int_S F_z(x, y, z_0+\Delta z)\,dx\,dy$

Que representam os fluxos de $\vec{F}$ através de cada um dos seis lados da caixa.

Os sinais negativos nas três primeiras representa o fato de que nessas superfícies o vetor normal $\hat{n}$ possui sentido negativo (180° com relação às componentes de $\vec{F}$.).

Mas $$F_x(x_0+\Delta x, y, z) = F_x(x_0, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x}.\Delta x$$

$$F_y(x, y_0+\Delta y, z) = F_y(x, y_0, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}.\Delta y$$

$$F_z(x, y, z_0+\Delta z) = F_z(x, y, z_0) + \frac{\partial F_z}{\partial z}.\Delta z$$

"Estas aproximações são válidas quando Δx, Δy e Δz tendem a zero. É o caso pois tomaremos o limite com o volume da caixa tendendo a zero."

Isto nas três últimas integrais de Fluxo resulta em

$$\phi_4 = \int_S \left[F_x(x_0, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x}.\Delta x\right] dy\, dz$$

$$\phi_5 = \int_S \left[F_y(x, y_0, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}.\Delta y\right] dx.dz$$

$$\phi_6 = \int_S \left[F_z(x, y, z_0) + \frac{\partial F_z}{\partial z}.\Delta z\right] dx\, dy$$

Segue que: $$\phi_4 = \int_S F_x(x_0, y, z)\, dy\, dz + \frac{\partial F_x}{\partial x}.\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\phi_5 = \int_S F_y(x, y_0, z)\, dx\, dz + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y.\Delta x.\Delta z$$

$$\phi_6 = \int_S F_z(x, y, z_0)\, dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial z}.\Delta z.\Delta x.\Delta y$$

Somando todos o fluxos:

$$\phi_F = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6$$

$$\phi_F = \cancel{-\int_S F_x(x_0, y, z)\, dy\, dz} \cancel{-\int_S F_y(x, y_0, z)\, dx\, dz} \cancel{-\int_S F_z(x, y, z_0)\, dx\, dy}$$

$$\cancel{+\int_S F_x(x_0, y, z)\, dy\, dz} + \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \cancel{\int_S F_y(x, y_0, z)\, dx\, dz} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$\cancel{+\int_S F_z(x, y, z_0)\, dx\, dy} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\phi_F = \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \text{diverg.}(\vec{F}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \cdot \phi_F = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \phi_F$$

$$\Rightarrow \text{diverg.}(\vec{F}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \right)$$

$$\Rightarrow \text{diverg.}(\vec{F}) = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \frac{\cancel{\Delta x \Delta y \Delta z}}{\cancel{\Delta x \Delta y \Delta z}} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

Portanto:

$$\text{diverg.}(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Se definirmos um operador vetorial na forma

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}$$

Então podemos escrever diverg. $(\vec{F})$ como um produto escalar entre $\vec{\nabla}$ e $\vec{F}$, como segue:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}\right)\cdot\left(F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \text{diverg.}\,(\vec{F}).$$

— n —

Divergência de um vetor $\vec{F}$ em coordenadas polares.

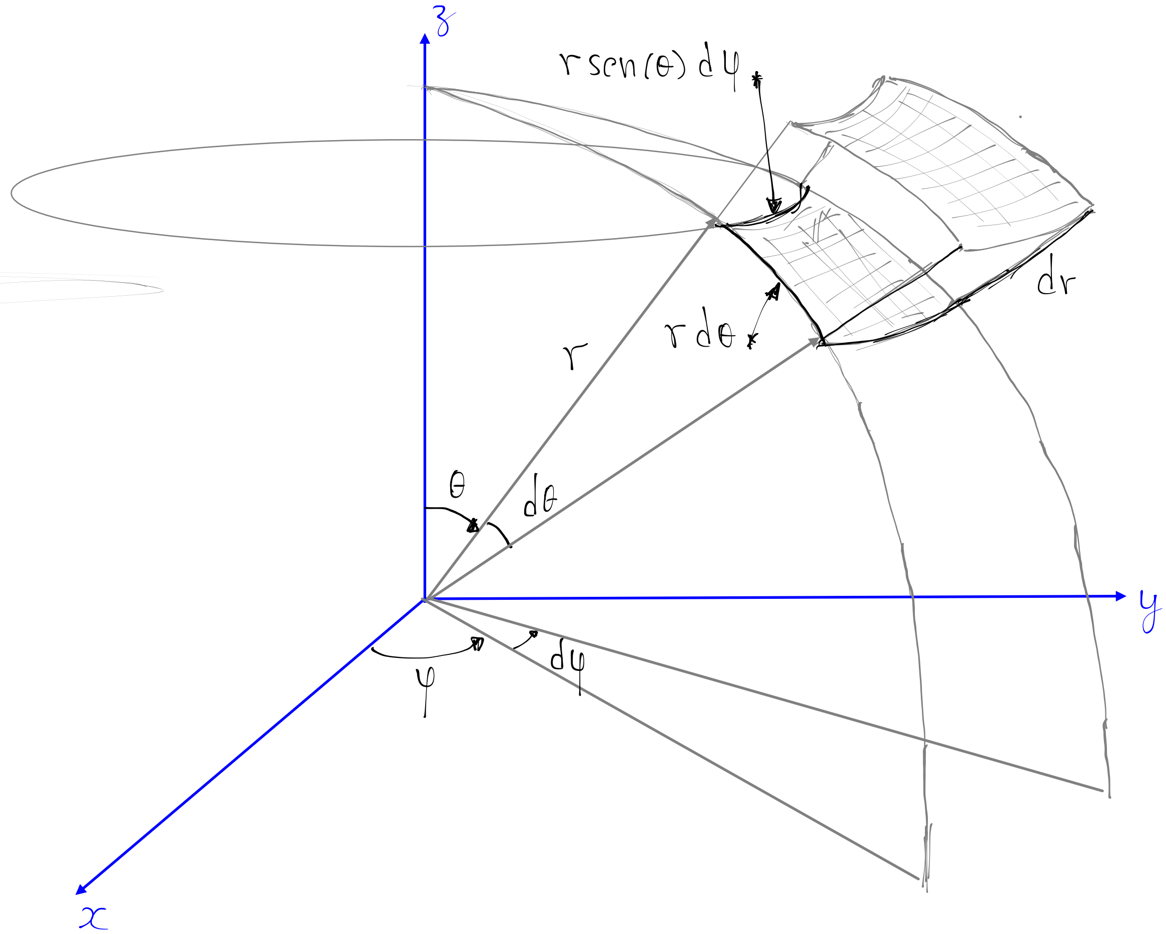
Acima verificamos que, para um elemento de volume retangular, o divergente (Densidade Volumetrica de fluxo através do elemento de volume) é dado pela soma das taxas de variação através do elemento de volume

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

É de se esperar que independentemente do sistema coordenado utilizado o diverg.($\vec{F}$) seja dado pela soma das taxas de variação da função no elemento de volume associado ao sistema específico utilizado.

Contudo, a forma como se obtém um elemento de volume difere dependendo do tipo de sistema coordenado utilizado.

Em coordenadas polares:



Neste caso o elemento de volume é:

$$dV = r\,d\theta\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\, d\varphi \cdot dr$$

$$dV = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

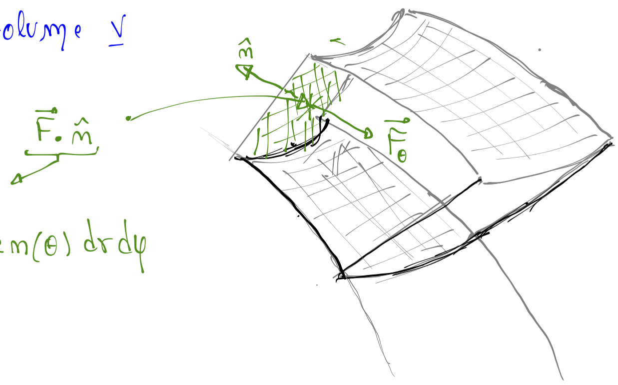
De uma forma geral o volume V é:

$$V = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$$

$$\mathrm{div}.\vec{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_S \vec{F}\cdot\hat{m}\, dA$$

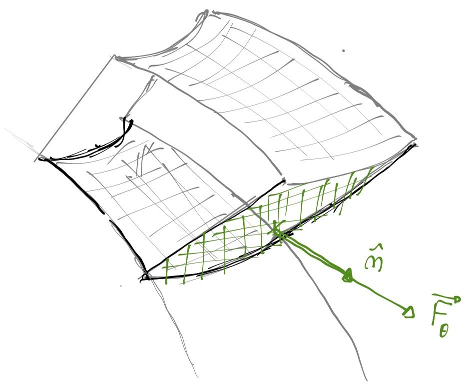
$$\mathrm{div}.\vec{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi}\left\{ \text{Fluxo no volume } (\phi_V) \right\}$$

Obtenção do fluxo no volume $\underline{V}$



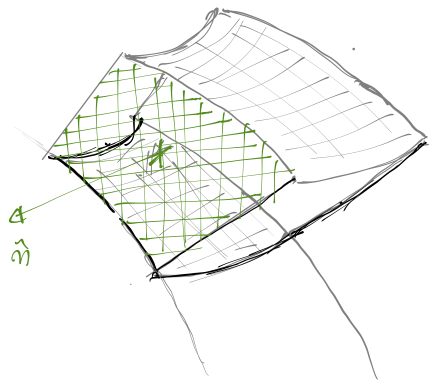
$$\int \vec{F}\cdot\hat{m}\, dA = -\int F_\theta(r,\theta_0,\varphi)\cdot r\,\mathrm{sen}(\theta)\, dr\, d\varphi$$

Neste lado:



$$\int \vec{F}\cdot\hat{m}\, dA = \int F_\theta(r,\theta_0+\Delta\theta,\varphi)\cdot r\,\mathrm{sen}(\theta+\Delta\theta)\, dr\, d\varphi$$

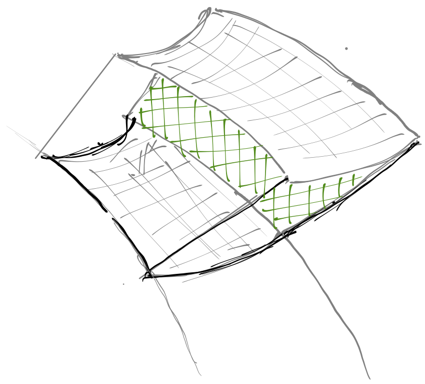
Neste Lado:



$$\int \vec{F}\cdot\hat{m}\, dA = -\int F_\varphi(r,\theta,\varphi_0)\, r\, d\theta\, dr$$

Neste:

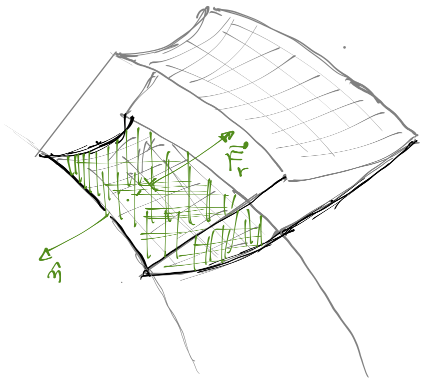
$$\int \vec{F} \cdot \hat{m} \, dA = \int F_\varphi (r, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) \cdot r \, d\theta \, dr$$



Neste lado:

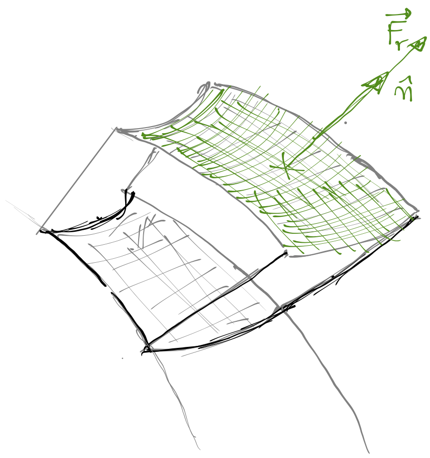
$$\int \vec{F} \cdot \hat{m} \, dA = -\int F_r (r_0, \theta, \varphi) \cdot r \, sen(\theta) \, d\varphi \cdot r \, d\theta$$

$$\int \vec{F} \cdot \hat{m} \, dA = -\int F_r (r_0, \theta, \varphi) \cdot r^2 sen(\theta) \, d\theta \, d\varphi$$



Neste Lado:

$$\int \vec{F} \cdot \hat{m} \, dA = \int F_r (r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) \cdot (r + \Delta r) \, d\theta \, r \, sen(\theta) \, d\varphi$$



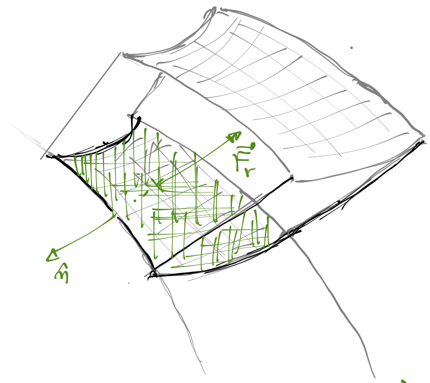
— 〃 —

Uma forma mais simples de se obter o fluxo em esféricas pode ser através do cálculo direto do fluxo nas faces (r_0, θ, φ), (r, θ_0, φ) e (r, θ, φ_0), e então tomando o fluxo nas faces posteriores usando a a aproximação linear. Finalmente, subtraindo os fluxos entres as faces.

Como segue:

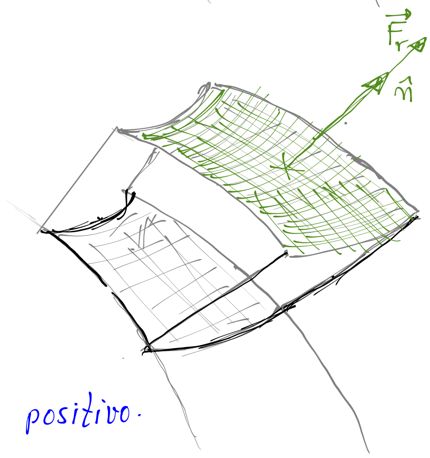
O fluxo atreves de (r_0, θ, φ)

é



$$\phi_{r_0} = -F_r(r_0, \theta, \varphi)\, r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, \Delta\theta \Delta\varphi$$

$\Rightarrow$ através de $(r_0+\Delta r, \theta, \varphi)$



será:

$$\phi_{r_0+\Delta r} = -\phi_{r_0} + \frac{\partial \phi_{r_0}}{\partial r} \cdot \Delta r$$

sinal trocado pois nesta face o fluxo é positivo.

Destas faces temos um fluxo líquido

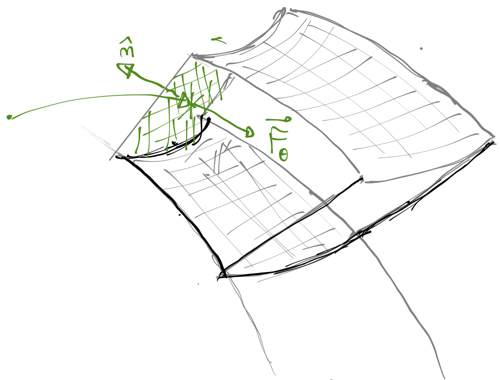
$$\phi_r = \phi_{r_0+\Delta r} + \phi_{r_0}$$

$\Rightarrow$ Deve somar. Os sinais são positivos para $\phi_{r_0+\Delta r}$ e negativo para ϕ_{r_0} $\longrightarrow$ retrata os sentidos de $\vec{F}_r$ com relação a $\hat{n}$.

$$\phi_r = \cancel{+F_r r^2 \operatorname{sen}(\theta).\Delta\theta\Delta\varphi} + \frac{\partial}{\partial r}\left(+F_r r^2 \operatorname{sen}(\theta)\,\Delta\theta\Delta\varphi\right) \cancel{- F_r r^2 \operatorname{sen}(\theta)\,\Delta\theta\Delta\varphi}$$

$$\phi_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right) \operatorname{sen}(\theta)\, \Delta\theta \Delta\varphi \Delta r$$

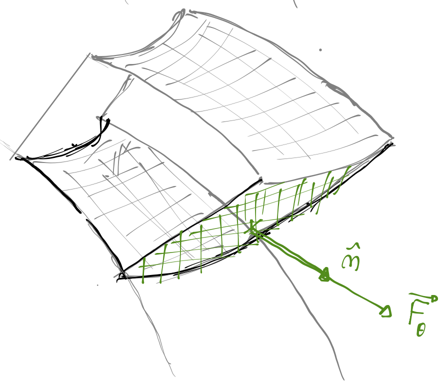
Para as faces (r, θ_0, φ) e $(r, \theta_0+\Delta\theta, \varphi)$



temos:

$$\phi_{\theta_0} = -F_\theta\, r \operatorname{sen}(\theta)\, \Delta\varphi . \Delta r$$

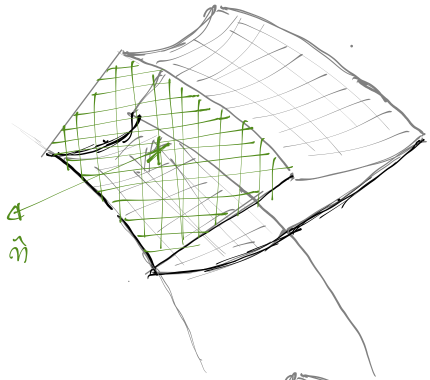
$$\phi_{\theta_0+\Delta\theta} = -\phi_{\theta_0} + \frac{\partial \phi_{\theta_0}}{\partial \theta} . \Delta\theta$$



$$\phi_\theta = \phi_{\theta_0+\Delta\theta} + \phi_{\theta_0}$$

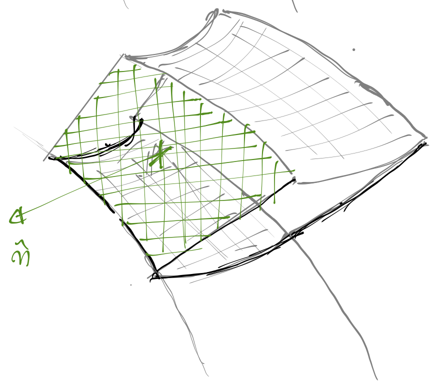
$$\Rightarrow \phi_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\Delta\varphi\,\Delta r\right)\cdot\Delta\theta$$

Para as faces perpendiculares à $\hat{\varphi}$



$$\Rightarrow \phi_{\varphi_0} = -F_\varphi\, r\,\Delta\theta\,\Delta r$$

$$\phi_{\varphi_0+\Delta\varphi} = -\phi_{\varphi_0} + \frac{\partial\phi_{\varphi_0}}{\partial\varphi}\cdot\Delta\varphi$$



$$\phi_\varphi = \phi_{\varphi_0+\Delta\varphi} + \phi_{\varphi_0}$$

$$\phi_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\, r\,\Delta\theta\,\Delta r\right).\Delta\varphi$$

Somando os fluxos

$$\phi_{total} = \phi_r + \phi_\theta + \phi_\varphi$$

$$\phi_{total} = \frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right)\mathrm{sen}(\theta)\,\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\Delta r + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\,\mathrm{sen}(\theta)\right) r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right).\, r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$$

$$\mathrm{diverg.}(\vec{F}) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi}\cdot\left\{\phi_{total}\right\}$$

$$\mathrm{diverg.}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\,\mathrm{sen}(\theta)\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right)$$

O operador Gradiente

Acima discutimos a divergencia de um vetor $\vec{F}$, tal que em coordenadas retangulares:

$$\text{div.}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad ,$$

onde $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial k}$.

O operador $\vec{\nabla}$ quando aplicado a uma função escalar $\varphi(x,y,z)$ retorna

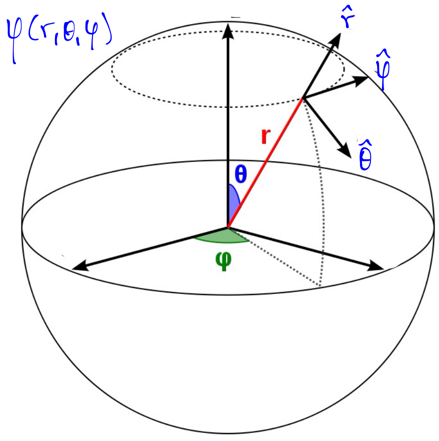
$$\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = \hat{\imath}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{k}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

"Notar que não faz sentido, neste caso, falar em produto escalar - produto escalar é uma operação entre vetores."

$\vec{\nabla}\varphi$ é denotado como gradiente de φ e representa a taxa de variação da função $\varphi(x,y,z)$ em cada sentido $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.

Pergunta: Vimos que o divergente em coordenadas retangulares é dado pelo produto escalar entre o operador gradiente $\vec{\nabla}$ e um vetor $\vec{F}$ $(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$.
$\Rightarrow$ Seria o divergente em outros sistemas coordenados também dado da mesma forma?

O gradiente em coordenadas esféricas, por exemplo, é dado por



$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Obs: Os termos em $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ são divididos pelas respectivas distâncias ao eixo de rotação. Isto para que a taxa de variação angulares não dependa da distância ao eixo de rotação – mas apenas da posição angular.

De fato $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ em coordenadas esféricas resulta no div.($\vec{F}$) tal como definido acima.

Fica como exercício mostrarem que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right)$$ resulta em

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right) + \frac{1}{r\,sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta\, sen(\theta)\right) + \frac{1}{r\,sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(F_\varphi\right).$$

Fica como exercício obter o operador gradiente $\vec{\nabla}$ e o div($\vec{F}$) $\equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ em coordenadas cilíndricas.

—11—

Operação Rotacional

Poderíamos definir friamente a operação rotacional sem conexão, em princípio, com qualquer fenômeno físico - uma definição puramente matemática. Por motivos "óbvios", vamos definir a operação rotacional com base nas integrais de linha presentes nas equações de Maxwell — assim como fizemos com a operação divergente através das equações de Maxwell para fluxo de campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Temos, das equações de Maxwell:

$$\oint_c \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad e \qquad \oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}(\phi_E)$$

Nosso objetivo é de levar estas relações a representarem regiões pontuais (infinitamente pequenas).

A fim de manter-se a similaridade com a definição de div$(\vec{F})$;

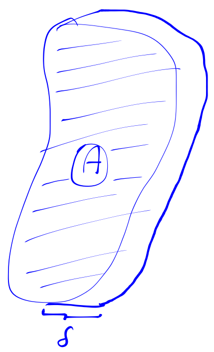
$$\text{rot}(\vec{F}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_s \hat{m}\times\vec{F}\, dA.$$

Para o propósito de aplicação às equações de Maxwell é conveniente recorrermos à definição, equivalente, relativa a um infinitesimal de superfície.

Dado um vetor unitário $\hat{a}$

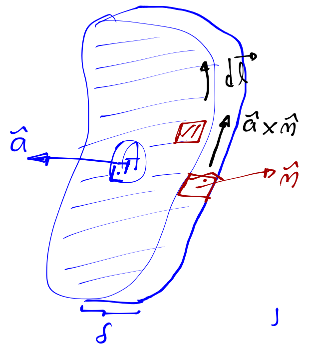
$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{F})\cdot\hat{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_s \hat{m}\times\vec{F}\, dA\cdot\hat{a}$$

Se considerarmos um volume muito fino de espessura δ



Esta forma é conveniente para nosso propósito pois vamos aplicar em situações onde consideraremos correntes elétricas e variações de campos através de uma Área $\underline{A}$.

Neste caso,



, digamos

$$\Rightarrow \ rot(\vec{F}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint \hat{m}\times\vec{F}\, dA = \lim_{V\to 0} \frac{1}{A\cdot\delta}\oint \hat{m}\times\vec{F}\, dA$$

A componente do vetor rotacional perpendicular à superfície $\underline{A}$ – no sentido de $\hat{a}$ – é:

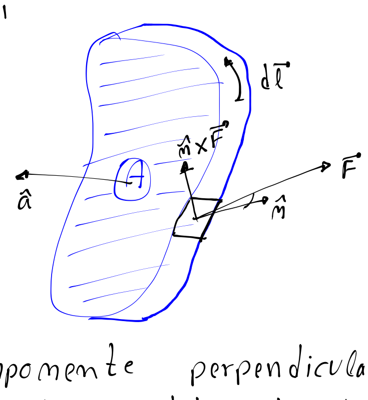
$$rot(\vec{F})\cdot\hat{a} = \left[\lim_{V\to 0} \frac{1}{A\cancel{\delta}}\oint \hat{m}\times\vec{F}\, dl.\cancel{\delta}\right]\cdot\hat{a}$$

$$rot(\vec{F})\cdot\hat{a} = \left[\underbrace{\lim_{A\to 0} \frac{1}{A}\oint \hat{m}\times\vec{F}\, dl}\right]\cdot\hat{a}$$

As componentes sobre $\underline{A}$ não colaboram pois $(\hat{m}\times\vec{F})\cdot\hat{a}$ = zero nesta região.

Vamos então considerar apenas a região na borda $\underline{\delta}$.

Nesta região $\hat{m}\times\vec{F}$ está sobre a superfície,



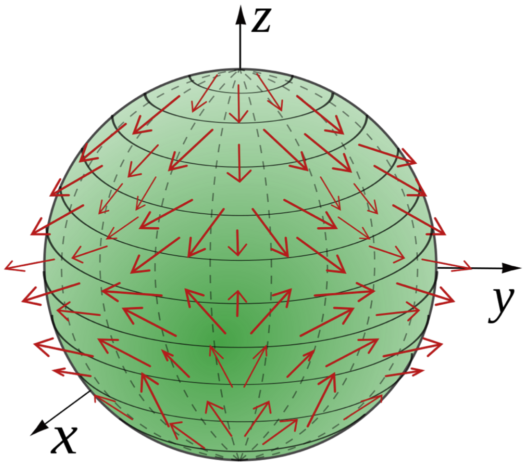
de $\hat{m}\times\vec{F}$ só colabora para o rot $(\vec{F})$ a componente perpendicular à ao vetor $\underline{\hat{a}}$; note que rotacional é uma operação tipo produto vetorial.
Ou seja, $(\hat{m}\times\vec{F})\cdot\hat{a} \longrightarrow \vec{F}\cdot\hat{l}$, onde $\hat{l}$ é um unitário colinear com a borda, logo:

$(\hat{m} \times \vec{F}) \cdot \hat{a}\, dl$, como escalar equivale a $\vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{a} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Neste ponto vamos ao que interessa realmente. O que esta relação significa do ponto de vista geométrico?

⇒ Iniciamos com a definição $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \hat{m} \times \vec{F}\, dA$, representando a soma das componentes tangenciais do campo vetorial $\vec{F}$ sobre os elementos de área dA ao redor de uma superfície fechada $\underline{S}$, que engloba um volume $\underline{V}$, como representado abaixo para um volume esférico.



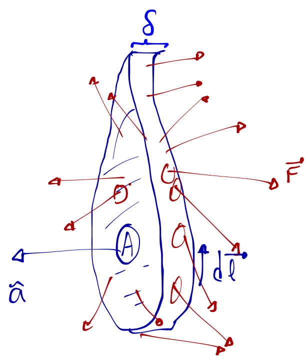
Note que, para o caso particular de uma esfera em um campo de força
⇒ A soma de todos os $\operatorname{rot}(\vec{F})$ representa a força girada que produz um torque sobre a esfera.

A definição acima está em sua forma mais geral.

Contudo, nas aplicações em eletromagnetismo, queremos representar pontualmente relações do tipo

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{l} .$$

⇒ A definição mais geral assume esta forma (escalar) quando consideramos a componente do rotacional perpendicular à superfície maior de um volume fino ⇓



ou seja, $rot(\vec{F}).\hat{a}$.

Segue que para esta situação particular

$rot(\vec{F}).\hat{a} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{F}.d\vec{l}$, onde a integral está limitada à borda fina da superfície.

Vale notar que o limite com $A \to 0$ faz com que $rot(\vec{F}).\hat{a}$ a integral de linha ao redor de um elemento de área. Em outras palavras, dado um campo vetorial qualquer sobre um volume fino (superfície) qualquer, o efeito total sobre a superfície completa será gerado pela soma das componentes normais do rotacional em cada elemento de superfície.

Obtenção das formas explícitas de $\underline{rot(\vec{F}).\hat{a}}$ em sistemas coordenados específicos.

A obtenção da forma rotacional explicita em termos das taxas de variação espacial de $\vec{F}$ é obtida de forma análoga à realizada para o divergente.

Exercício:

$\boxed{\text{* Fica como exercício para os estudantes obterem para diferentes sistemas coordenados *}}$

Por fim chega-se em

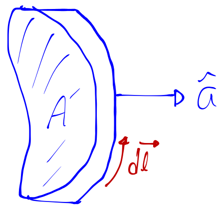
$$rot(\vec{F}) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{n}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Vamos levar as definições acima às equações de linha de Maxwell.

$$\Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \text{com} \qquad \phi_B = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{a} = \left[\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]$$

sendo o unitário $\underline{\hat{u}}$ perpendicular à superfície $\underline{A}$.



Mas $\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} (-) \frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt}$

$$= - \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \frac{d}{dt} (A \hat{a} \cdot \vec{B})$$

Como o elemento de $\underline{A}$ não varia no tempo:

$$= - \lim_{A \to 0} \frac{1}{\cancel{A}} \cdot \cancel{A} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= - \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{a} = - \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{dt}$$

ou, retirando o unitário $\hat{a}$,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Deixemos como exercício mostrar, a partir da definição de rotacional que

$$\underline{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

"$\vec{J}$ = densidade superficial (perpendicular à superfície) de corrente."

Finalmente, podemos expressar as relações de Maxwell do eletromagnetismo, em sua forma diferencial, como

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
\quad , \text{ com } \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}
$$