Nesta parte vamos apresentar algumas operacões matemáticas que encontrarão, possivelmente, aplicações no eletromagnetismo dentro do contexto deste curso.

Apresentamos, na página seguinte, uma tabela com as principais relações.

As relações a seguir foram copiadas do livro "Fundamentos da teoria eletromagnética" - Reitz - Milford - Christ.

Sumarizando, as principais relações vetoriais são

(1) $\vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi$

(2) $\vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi$

(3) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$

(4) $\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$

(5).a $\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$

(5).b $\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{\nabla}_G(\vec{F}\cdot\vec{G}) + \vec{\nabla}_F(\vec{G}\cdot\vec{F})$

Os subscripts G e F denotam que a diferenciação deve ocorrer sobre os fatores relativos à função $\vec{G}$ e $\vec{F}$, respectivamente, após realizados os produtos escalares $\vec{F}\cdot\vec{G}$ e $\vec{G}\cdot\vec{F}$.

(6) $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\varphi$

(7) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G}$

(8) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{F}$

(9) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$

(10) $\oint_S \vec{F}\cdot\hat{m}\, dA = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV$

(11) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{m}\, dA$

(12) $\oint_S \varphi\,\hat{m}\, dA = \int_V \vec{\nabla}\varphi\, dA$

(13) $\oint_S \vec{F}(\vec{G}\cdot\hat{m})\, dA = \int_V \vec{F}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\, dV + \int_V (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}\, dV$

(14) $\oint_S \hat{m}\times\vec{F}\, dA = \oint_V \vec{\nabla}\times\vec{F}\, dV$

(15) $\oint_C \varphi\, d\vec{l} = \int_S \hat{m}\times(\vec{\nabla}\varphi)\, dA$

Durante a obtenção das equações de Maxwell em sua forma diferencial definimos as operações de divergência e rotação de um campo vetorial $\vec{F}$; através do uso do operador gradiente $\vec{\nabla}$, tal que:

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ $\text{Grad.}(\varphi) = \vec{\nabla}(\varphi)$

$\text{div.}(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F}$

$\text{rot.}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{F}$.

Neste ponto vamos definir algumas operações adicionais, bem como introduzir identidades vetoriais que serão, possivelmente, úteis quando da manipulação das relações diferenciais de Maxwell.

O Laplaciano

Dada uma função escalar φ, temos que $\vec{\nabla}\varphi$ é um vetor.

Exemplo, em coordenadas retangulares:

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}.$$

Sendo $\vec{\nabla}\varphi$ um campo vetorial então podemos obter o divergente deste campo como

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi \equiv \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}$$ é denominado Laplaciano da função escalar φ.

(Obs: Em geral, todo campo vetorial pode ser expresso como gradiente de uma função escalar.) *

* Verificar se esta afirmação é verdadeira.

Exemplo: O campo gravitacional $\vec{g}$

Potencial gravitacional é uma função escalar dada por

$$V = -\frac{GM}{r}$$ ⟹ "Esta é uma função escalar de r"

$$\Rightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{g} = -\underbrace{\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}_{\vec{\nabla}}\underbrace{(-)\frac{GM}{r}}_{V}$$

$$\vec{g} = +GM\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

A força é $\vec{F} = m\vec{g} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$.

"O sinal negativo representa a atração".

⟹ Se então tomarmos o div. $(\vec{g}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{g}$, segue:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = \nabla^2(-V)$$

Ou seja, o divergente da gravidade é o Laplaciano a função escalar associada ao potencial gravitacional.

Exercício:

$\boxed{\nabla^2(-V) \text{ seria proporcional a que?}}$

⟹ Então o Laplaciano é na verdade o divergente de um vetor escrito na forma de gradiente de uma função escalar.

Verificações das Identidades Vetoriais

Sugestões de procedimentos para demonstrações das identidades listadas na tabela acima (Pág. 2).

Algumas das identidades acima, se abertas de forma completa e explícita, resultariam em equações muito grandes. Uma equação muito extensa traz certos inconvenientes como: Maior probabilidade de erros, maior tempo para seu desenvolvimento, maior grau de abstração (no meio de uma solução algébrica muito extensa, é comum que o motivo físico que a originou fique esquecido).

Quando este for o caso, é comum aplicar-se técnicas de desenvolvimento simplificadas. Em geral, para relações com vetores, é comum desenvolver-se a operação considerando apenas uma componente vetorial e, no fim, extendendo-se o procedimento para as demais componentes (implicitamente).

Através dos desenvolvimentos realizados para as obtenções das formas explícitas das operações de divergência e rotacional, é fácil verificar que a forma como se escreve estas operações diferenciais em termos do operador gradiente $(\vec{\nabla})$ é a mesma independente do sistema coordenado utilizado. Em outras palavras,

$$\vec{\nabla}\psi \;,\; \vec{\nabla}.\vec{F} \;,\; \vec{\nabla}\times\vec{F} \;,\; \nabla^2\psi \;,\; \text{etc...} \;,$$

é aplicado a qualquer sistema coordenado, bastando escrever-se o operador $\vec{\nabla}$ associado ao sistema com simetria apropriada.

$\Longrightarrow$ Isto significa que os resultados das demonstrações utilizando $\vec{\nabla}$ em qualquer dos sistemas referenciais ortonormais (retangular, esférico e cilíndrico), vale para os demais.

Mas em que isso ajuda? $\Rightarrow$ Quando das verificações de identidades vetoriais podemos desenvolvê-las em qualques dos sistemas referenciais e inferir que o resultado é válido para os demais.

Mas algum dos sistemas coordenados é melhor que os demais para os desenvolvimentos de identidades vetoriais?

$\Rightarrow$ Para aqueles que não se importam com trabalhos braçais, podemos dizer que não há sistema privilegiado. No entanto, é fácil notar que o sistema retan_ gular possui grande simetria entre seus eixos coordenados (todos unidirecionais), tal que o operador $\vec{\nabla}$ possui a mesma forma para as três componentes vetoriais, o que não acontece para os demais sistemas coordenados pelo fato de contarem com variáveis angulares

Retangular: $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

Esférico: $\vec{\nabla} = \hat{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\dfrac{1}{r\,sen(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$

Cilíndrico: $\vec{\nabla} = \hat{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

"Note que as dimensões retilíneas são derivadas diretas, qualquer que seja o referencial adotado, e que as dimensões angulares são todas divididas pela distância ao "eixo" de rotação ($1/r$, $1/r\,sen(\theta)$, $1/r$)".

⇒ Portanto, o sistema com maior grau de simetria é o sistema coordenado retangular.

Sendo assim, neste sistema, a forma matemática associada à operações com uma de suas coordenadas é a mesma que as realizadas com as outras duas coordenadas.

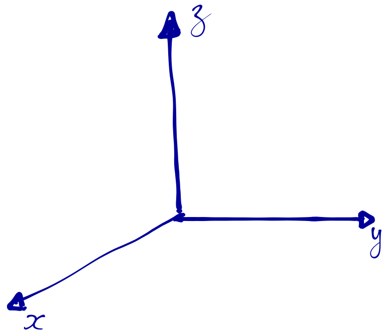
Vamos a um exemplo prático:

Obtenção do divergente de um vetor $\vec{F}$ em cada uma das coordenadas retangulares discutidas acima.

SOLUÇÃO: Em retangulares: $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ e $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

para um sistema do tipo:

para um sistema do tipo:



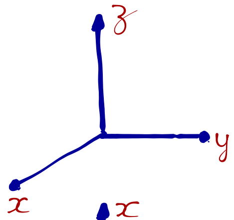
$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} F$, vamos considerar apenas a coordenada $\underline{x}$ do operador $\vec{\nabla}$ atuando sobre $\vec{F}$.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x \cdot \vec{F} = \left(\hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k}\right)$$

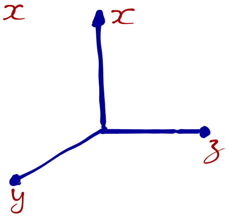
$\Rightarrow$ Como se trata de um produto escalar, só restará a componente F_x.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_x \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}}$$

Agora, note que realizamos a operação em $\underline{x}$ para o sistema $\Longrightarrow$



Então, se girarmos o sistema tal que $\Longrightarrow$

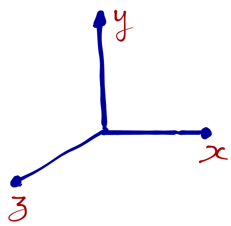


,

$\Rightarrow$ Tudo que fizemos para $\underline{x}$ serve agora para $\underline{y}$, tal que basta trocarmos a coordenada $\underline{x}$ pela coordenada $\underline{y}$ na operação $\vec{\nabla}_x \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x}$.

Resulta que $\vec{\nabla}_y \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_y}{\partial y}$.

Girando novamente, posicionando a coordenada $\underline{z}$ em nosso sentido de referência, $\Longrightarrow$



,

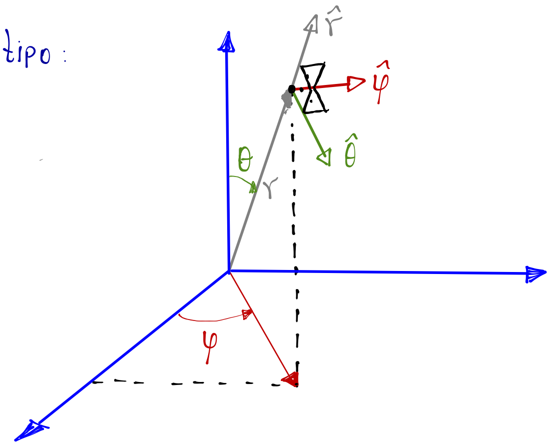
Resulta que $\vec{\nabla}_z \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

$\Rightarrow$ Como $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_x + \vec{\nabla}_y + \vec{\nabla}_z$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}}$

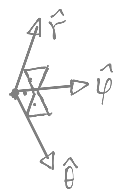
Vamos tentar repetir este procedimento para o sistema de coordenadas esféricas, digamos, obter $\vec{\nabla}_r \cdot \vec{F}$ e generalizar para as demais através do giro das coordenadas.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Para um sistema do tipo:

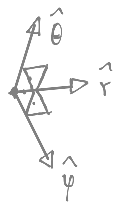


Evidenciando os unitários $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \vec{\nabla}_r \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r}$$

$\Rightarrow$ Girando $\longrightarrow$



"Seríamos levados a admitir que: $\vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$,

o que não corresponde à realidade, afinal:

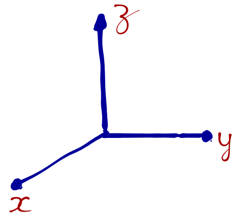
$$\vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{F} = \left(\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \left(F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

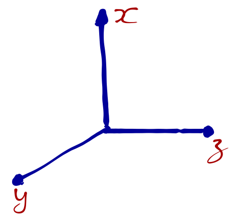
diferente de

Em resumo, utilizando o sistema retangular de coordenadas podemos extender o resultado dos desenvolvimentos algébricos realizados para uma componente para as demais componentes, bastando realizar a troca das componentes, respeitando a convenção destrogiro, ou seja:

$\Rightarrow$ Se o desenvolvimento é realizado aplicando-se a componente $\underline{x}$ de um operador vetorial considerando o sistema



, e obtêve-se o resultado $R_x(x,y,z)$, podendo $R_x(x,y,z)$ ser um vetor ou um escalar; Então, o resultado em $\underline{y}$ $\{R_y(x,y,z)\}$, será, conforme o giro



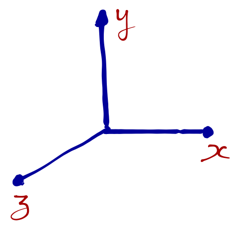
, obtido pelas trocas:

$$\begin{cases} x \longrightarrow y \\ y \longrightarrow z \\ z \longrightarrow x \end{cases};$$

ou seja,

$$\boxed{R_y(x,y,z) = R_x(y,z,x)}\,.$$

De forma similar, girando para $\underline{z}$:



, $\Longrightarrow$ $\boxed{R_z(x,y,z) = R_x(z,x,y)}\,.$

$\Rightarrow$ O resultado total é dado pela soma direta

$$R(x,y,z) = R_x(x,y,z) + R_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)\;;$$

$$\boxed{R(x,y,z) = R_x(x,y,z) + R_x(y,z,x) + R_x(z,x,y)}$$

Verificação da identidade $\boxed{(1)\quad \vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi}$.

$\Rightarrow$ Vamos desenvolver para a componente x de $\vec{\nabla}(\varphi+\psi)$.

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} = \left(\hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ será aplicado na função escalar $(\varphi+\psi)$. Seguindo o procedimento sugerido acima, vamos aplicar apenas a componente $\hat{\imath}$ de $\vec{\nabla}$ sobre $(\varphi+\psi)$.

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}_x(\varphi+\psi) = \left(\hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)(\varphi+\psi)$

Obs: trata-se de uma aplicação direta e não um produto escalar (erro conceitual comum), afinal $(\varphi+\psi)$ é escalar, e não um vetor.

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}_x(\varphi+\psi) = \hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi) = \hat{\imath}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\imath}$

$\Rightarrow$ Para $\vec{\nabla}_y(\varphi+\psi) \longrightarrow R_y(x,y,z) = R_x(y,z,x)$, trocar apenas x por y, pois $R_x(x,y,z)$ depende apenas de x.

$\longrightarrow$ $\vec{\nabla}_y(\varphi+\psi) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\hat{\jmath}$.

Similarmente como $R_z(x,y,z) = R_x(z,x,y)$,

$$\vec{\nabla}_z(\varphi+\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}_x(\varphi+\psi) + \vec{\nabla}_y(\varphi+\psi) + \vec{\nabla}_z(\varphi+\psi)$

$$\vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}}_{\vec{\nabla}\varphi} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}}_{\vec{\nabla}\psi}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi}$$

Verificação da identidade $\boxed{(2) \quad \vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi}$

Componente $\underline{x}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}(\varphi\psi)_x$

$\Rightarrow$ Utilizar $(\vec{\nabla})_x = \hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\varphi\psi)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\,\hat{\imath} = \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\varphi\psi)_x = \varphi\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\imath}}_{(\vec{\nabla}\psi)_x} + \psi\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath}}_{(\vec{\nabla}\varphi)_x}$$

$\Rightarrow$ Como o mesmo se aplica para as demais componentes, concluimos que:

$$\boxed{\vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi}$$

Verificação da identidade $\boxed{(3) \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}}$

Obs: Lembrar que $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}$

Vamos aplicar $\vec{\nabla}_x = \hat{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x}$ em $(\vec{F}+\vec{G})$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right]\cdot\left[(F_x+G_x)\hat{\imath}\right]$$

$\Rightarrow$ As componentes $\underline{y}$ e $\underline{z}$ de $\vec{F}+\vec{G}$ estão omitidas pois zeram o produto escalar; $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_x+G_x) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial G_x}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Aplicando as três componentes:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}}$$

Exercício qualitativo.

Fisicamente (eletrostática, por exemplo), o que esta identidade representa ?

Verificacão da identidade $\vec{\nabla}_x \times (\vec{F}+\vec{G})$.

$$\boxed{(4) \quad \vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}}$$

Note que neste caso "as componentes" de $(\vec{F}+\vec{G})$ que zeram o produto vetorial é apenas a componente $\underline{x}$. Então neste caso, diferente do produto escalar, devemos manter $(F_y+G_y)\hat{j}$ e $(F_z+G_z)\hat{k}$.

$$\vec{\nabla}_x \times \left[(F_y+G_y)\hat{j} + (F_z+G_z)\hat{k}\right] = \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right]\times\left[(F_y+G_y)\hat{j} + (F_z+G_z)\hat{k}\right]$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_x \times (\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_y+G_y)\hat{k} - \frac{\partial}{\partial x}(F_z+G_z)\hat{j}}$$

Aplicando a simetria do sistema cartesiano ortogonal:

substituirmos $\underline{x \text{ por } y}$, $\underline{y \text{ por } z}$ e $\underline{z \text{ por } x}$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_y \times (\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial y}(F_z+G_z)\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial y}(F_x+G_x)\hat{k}},$$

e de forma similar,

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_z \times (\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial z}(F_x+G_x)\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}(F_y+G_y)\hat{\imath}}.$$

Somando tudo temos:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_y+G_y)\hat{k} - \frac{\partial}{\partial x}(F_z+G_z)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial y}(F_z+G_z)\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial y}(F_x+G_x)\hat{k}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(F_x+G_x)\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}(F_y+G_y)\hat{\imath}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad \leftarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$+ \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad \leftarrow \vec{\nabla}\times\vec{G}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}}$$

Verificação das identidades (5).a e (5).b.

$$\boxed{(5).a\ \vec{\nabla}(\vec{F}.\vec{G}) = (\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})}$$

$$\boxed{(5).b\ \vec{\nabla}(\vec{F}.\vec{G}) = \vec{\nabla}_G(\vec{F}.\vec{G}) + \vec{\nabla}_F(\vec{G}.\vec{F})}$$

Nota: → Vimos acima que é possível diminuir-se o trabalho algébrico utilizando-se da simetria do sistema retangular. Notadamente, esta simetria pode ser aprofundada ainda mais, bem como utilizar-se formas mais diretas para os operadores diferenciais.

Este formato utiliza, basicamente:

(1) O delta de Kronecker ⟶ "δ_{ij}"
(2) O símbolo de Levi-Civita → "ε_{ijk}"
(3) A convenção da soma de Einstein.

⇒ Esta forma ainda mais direta de se proceder será detalhada em notas adicionais que serão disponibilizadas em "breve."

Não significa que não podemos verificar a identidade acima como vínhamos procedendo até então. Como segue:

Iniciemos pelas obtenções dos dois últimos termos do lado direito,

$\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})$ e $\vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$.

⇒ Definindo $\vec{\nabla}\times\vec{G} = \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{F}\times\vec{B} = (F_y B_z - F_z B_y)\hat{\imath} + (F_z B_x - F_x B_z)\hat{\jmath} + (F_x B_y - F_y B_x)\hat{k}$$

Mas
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{G} = \underbrace{\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)}_{B_x}\hat{\imath} + \underbrace{\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)}_{B_y}\hat{\jmath} + \underbrace{\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)}_{B_z}\hat{k}$$

Portanto $\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) =$

$$\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) = \left\{F_y\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right) - F_z\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\right\}\hat{\imath}$$

$$+\left\{F_z\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) - F_x\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right\}\hat{\jmath}$$

$$+\left\{F_x\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) - F_y\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\right\}\hat{k}$$

Focando apenas a componente $\hat{\imath}$:

$$[\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})]_x = \left(F_y\frac{\partial G_y}{\partial x} + F_z\frac{\partial G_z}{\partial x}\right) - \left(F_y\frac{\partial G_x}{\partial y} + F_z\frac{\partial G_x}{\partial z}\right)$$

Note que no primeiro termo ocorrem as coordenadas em y e em z. Vamos adicionar o termo com a coordenada x.

⇒ Basta adicionarmos zero na forma

$$0 = F_x\frac{\partial G_x}{\partial x} - F_x\frac{\partial G_x}{\partial x}$$

$$[\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})]_x = \left(F_x\frac{\partial G_x}{\partial x} + F_y\frac{\partial G_y}{\partial x} + F_z\frac{\partial G_z}{\partial x}\right) - \left(F_x\frac{\partial G_x}{\partial x} + F_y\frac{\partial G_x}{\partial y} + F_z\frac{\partial G_x}{\partial z}\right)$$

Que pode ser escrito na forma

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z\right)} - \left(F_x\frac{\partial}{\partial x} + F_y\frac{\partial}{\partial y} + F_z\frac{\partial}{\partial z}\right)G_x$$

↳ Desde que a derivada $\frac{\partial}{\partial x}$ atue apenas em G_x, G_y e G_z.

⇒ Note que $F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = \vec{F}\cdot\vec{G}$

e que $F_x\frac{\partial}{\partial x} + F_y\frac{\partial}{\partial y} + F_z\frac{\partial}{\partial z} = \vec{F}\cdot\vec{\nabla}$

$$[\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})]_x = \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial x}}(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}) - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})G_x$$

Obs: O traço abaixo de $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\vec{G}$ indica que a diferenciação atua apenas sobre $\vec{G}$ enquanto $\vec{F}$ é mantido constante.

⇒ Introduzindo as demais componentes temos que:

$$\boxed{\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) = \underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}) - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G}} \quad (*1)$$

Equivalentemente:

$$\boxed{\vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{G}\cdot\underset{\sim}{\vec{F}}) - (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}} \quad (*2)$$

~~~//~~~

Voltando à identidade (5).a

⇒ Somando $(*1)$ e $(*2)$:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) &= \underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}) + \underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{G}\cdot\underset{\sim}{\vec{F}}) \\ &\quad - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G} - (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}\end{aligned}} \quad (\text{Soma } *)$$

Note que $\underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}) \neq \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\vec{G}$, pois primeiro deve-se realizar o produto escalar $\vec{F}\cdot\vec{G}$ e depois tomar o gradiente sobre $\vec{G}$. Afinal, o resultado deve ser um vetor.

Neste ponto precisamos identificar a soma $\underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}) + \underset{\sim}{\vec{\nabla}}(\vec{G}\cdot\underset{\sim}{\vec{F}})$.

De fato, trata-se da identidade (5).b:

$$\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{\nabla}_G(\vec{F}\cdot\vec{G}) + \vec{\nabla}_F(\vec{G}\cdot\vec{F}) \qquad \text{"}\underline{\underline{\vec{F}\cdot\vec{G} = \vec{G}\cdot\vec{F}}}\text{"}$$
~~~

Vamos então verificar a identidade (5).b.

Atuando $\vec{\nabla}_x$ sobre $\vec{F}\cdot\vec{G}$ resulta:

$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\left(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_x G_x\right)\hat{\imath}$$

$$= \left(F_x \cdot \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot G_x\right)\hat{\imath}$$

Portanto, a componente $\underline{x}$ de $\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G})$ é

$$\left[\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G})\right]_x = F_x \cdot \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot G_x$$

Que pode ser escrita na forma

$$\left[\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G})\right]_x = \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(F_x \underset{\sim}{G_x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_x\right)G_x$$

Somando todas as componentes:

$$\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(F_x \underset{\sim}{G_x}\right)\hat{\imath} + \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(F_y \underset{\sim}{G_y}\right)\hat{\jmath} + \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial z}}\left(F_z \underset{\sim}{G_z}\right)\hat{k}$$

$$+ \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\underset{\sim}{F_x} G_x\right)\hat{\imath} + \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\underset{\sim}{F_y} G_y\right)\hat{\jmath} + \underset{\sim}{\frac{\partial}{\partial z}}\left(\underset{\sim}{F_z} G_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \underset{\sim}{\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)}\left(F_x \underset{\sim}{G_x} + F_y \underset{\sim}{G_y} + F_z \underset{\sim}{G_z}\right)$$

$$+ \underset{\sim}{\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)}\left(\underset{\sim}{F_x} G_x + \underset{\sim}{F_y} G_y + \underset{\sim}{F_z} G_z\right)$$

Portanto

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \underset{\sim}{\vec{\nabla}}\left(\vec{F}\cdot\underset{\sim}{\vec{G}}\right) + \underset{\sim}{\vec{\nabla}}\left(\underset{\sim}{\vec{F}}\cdot\vec{G}\right) \qquad [(5).b]_*}$$

Este resultado inserido na "soma *", verificada acima:

$$\text{"}\ \boxed{\begin{aligned}\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) &= \underset{\sim}{\nabla}(\vec{F}.\underset{\sim}{\vec{G}}) + \underset{\sim}{\nabla}(\vec{G}.\underset{\sim}{\vec{F}}) \\ &\quad -(\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G} - (\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F}\end{aligned}}\ \text{"} \quad (\text{Soma } *).$$

$$\Rightarrow \vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{F}.\vec{G}) - (\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G} - (\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F}$$

O que corresponde à identidade (5).a

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{F}.\vec{G}) = (\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})}$$

Verificação da identidade $\boxed{(6)\quad \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}) = \vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}_x) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\varphi F_x\hat{\imath}\right)$$

$$\vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi F_x)\,\underbrace{\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}}_{1}$$; aplicando a derivada do produto:

$$\vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\frac{\partial F_x}{\partial x} + F_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Mas $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} = \vec{\nabla}_x\cdot\vec{F}$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \vec{\nabla}_x\varphi \Rightarrow F_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_x\varphi$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}_x\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_x\varphi$$

Aplicando a simetria do sistema retangular: $(x \longrightarrow y)$.

$$\vec{\nabla}_y\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}_y\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_y\varphi\ ,$$

também: Relativo ao primeiro $\left\{\vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F})\right\} \Longrightarrow x \longrightarrow z$

ou Relativo ao segundo $\left\{\vec{\nabla}_y\cdot(\varphi\vec{F})\right\} \Longrightarrow y \longrightarrow z$.

tal que, $\vec{\nabla}_z\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}_z\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_z\varphi$.

Somando:

$$\vec{\nabla}_x\cdot(\varphi\vec{F}) + \vec{\nabla}_y\cdot(\varphi\vec{F}) + \vec{\nabla}_z\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}_x\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_x\varphi$$
$$+\ \varphi\,\vec{\nabla}_y\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_y\varphi$$
$$+\ \varphi\,\vec{\nabla}_z\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_z\varphi\,.$$

$$\underbrace{(\vec{\nabla}_x + \vec{\nabla}_y + \vec{\nabla}_z)}_{\vec{\nabla}}\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\underbrace{(\vec{\nabla}_x + \vec{\nabla}_y + \vec{\nabla}_z)}_{\vec{\nabla}}\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}_x + \vec{\nabla}_y + \vec{\nabla}_z)}_{\vec{\nabla}}\varphi$$

Portanto: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F}) = \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\varphi}$.

Verificação da identidade $\boxed{(7)\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G}}$

Vamos aplicar o produto escalar entre $\vec{\nabla}_x$ e o vetor $(\vec{F}\times\vec{G})$.

$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\Big\{\left(F_yG_z - F_zG_y\right)\hat{\imath} + \left(F_zG_x - F_xG_z\right)\hat{\jmath} + \left(F_xG_y - F_yG_x\right)\hat{k}\Big\}$$

$$\vec{\nabla}_x\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_yG_z - F_zG_y\right)$$

"Obs: Vamos fazer $\frac{\partial}{\partial_i} \equiv \partial_i$"

$$= F_y\,\partial_x G_z + G_z\,\partial_x F_y - F_z\,\partial_x G_y - G_y\,\partial_x F_z$$

Aplicando a simetria retangular:

1ª Rotação: x por y, y por z e z por x

$$\vec{\nabla}_y\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = F_z\,\partial_y G_x + G_x\,\partial_y F_z - F_x\,\partial_y G_z - G_z\,\partial_y F_x$$

2ª Rotação: x por z, y por x e z por y

$$\vec{\nabla}_z\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = F_x\,\partial_z G_y + G_y\,\partial_z F_x - F_y\,\partial_z G_x - G_x\,\partial_z F_y$$

Somando todas as componentes:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = F_y\,\partial_x G_z + G_z\,\partial_x F_y - F_z\,\partial_x G_y - G_y\,\partial_x F_z + F_z\,\partial_y G_x + G_x\,\partial_y F_z - F_x\,\partial_y G_z - G_z\,\partial_y F_x + F_x\,\partial_z G_y + G_y\,\partial_z F_x - F_y\,\partial_z G_x - G_x\,\partial_z F_y$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = F_x\left(\partial_z G_y - \partial_y G_z\right) + F_y\left(\partial_x G_z - \partial_z G_x\right) + F_z\left(\partial_y G_x - \partial_x G_y\right) + G_x\left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) + G_y\left(\partial_z F_x - \partial_x F_z\right) + G_z\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right)$$

Agora note que: $\partial_z G_y - \partial_y G_z = -\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}\right]_x$, etc...

e $\partial_y F_z - \partial_z F_y = \left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]_x$, etc...

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = -F_x[\vec{\nabla}\times\vec{G}]_x - F_y[\vec{\nabla}\times\vec{G}]_y - F_z[\vec{\nabla}\times\vec{G}]_z +$$

$$G_x[\vec{\nabla}\times\vec{F}]_x + G_y[\vec{\nabla}\times\vec{F}]_y + G_z[\vec{\nabla}\times\vec{F}]_z$$

$\Rightarrow$ Claramente, a primeira linha corresponde ao produto escalar

$$-\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G}\ ,$$

enquanto que a segunda linha corresponde a

$$\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F}\ ,$$ Portanto.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G}}$$

Verificação da identidade $\boxed{(8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{F}}$

Durante o desenvolvimento da identidade (5).a, verificamos que

$$\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \underline{\vec{\nabla}}(\vec{F}\cdot\underline{\vec{G}}) - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G}.$$

Nesta relação, levemos $\vec{F} \longrightarrow \vec{\nabla}$ e
$\vec{G} \longrightarrow \vec{F}$.

Resulta que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underline{\vec{\nabla}}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{F}}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}$$

Note que o primeiro termo conta com apenas uma função $(\vec{F})$ tornando, portanto desnecessária a indicação de quem deve ser diferenciado, ou seja:

$$\underline{\vec{\nabla}}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}).$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}}.$$

Obs: O último termo pode ser escrito como $\nabla^2\vec{F}$, o Laplaciano de um vetor, que é um vetor, obviamente.

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}}.$$

Verificação da identidade $\boxed{(9)\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0}$

Vamos aplicar o produto vetorial entre $\vec{\nabla}_x$ e $\vec{\nabla}\psi$.

$$\vec{\nabla}_x \times \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}_x \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \right)$$

$$= \nabla_x \hat{\imath} \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \right) \qquad \text{"} \nabla_x \hat{\imath} = \partial_x \hat{\imath} \text{"}$$

$$= \partial_x \partial_y \psi\, \hat{k} - \partial_x \partial_z \psi\, \hat{\jmath}$$

Inserindo as outras componentes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = \partial_x\partial_y\psi\,\hat{k} - \partial_x\partial_z\psi\,\hat{\jmath} + \partial_y\partial_z\psi\,\hat{\imath} - \partial_y\partial_x\psi\,\hat{k} + \partial_z\partial_x\psi\,\hat{\jmath} - \partial_z\partial_y\psi\,\hat{\imath}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = \left(\partial_y\partial_z - \partial_z\partial_y\right)\psi\,\hat{\imath} + \left(\partial_z\partial_x - \partial_x\partial_z\right)\psi\,\hat{\jmath} + \left(\partial_x\partial_y - \partial_y\partial_x\right)\hat{k}$$

Mas $\left(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i\right)\psi = \text{zero}$

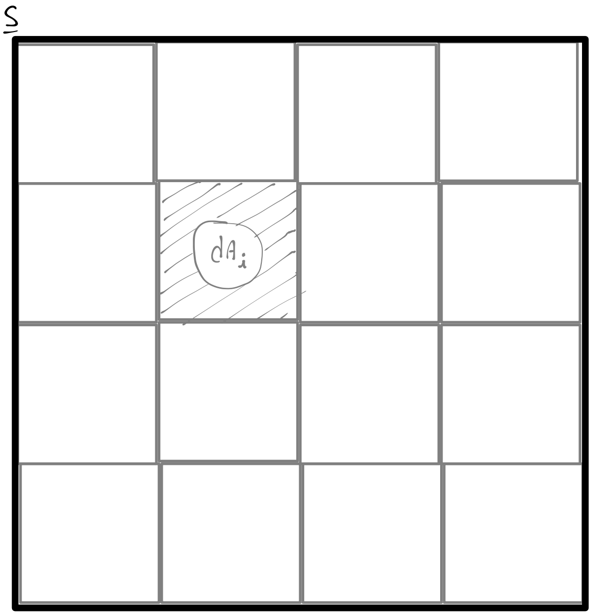
Portanto:

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi\right) = 0}$$

O teorema de Stokes $\longrightarrow$ $\displaystyle\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_s \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{m}\, dA$

A demostracão desta relacão já foi realizada quando do desenvolvimento das formas diferenciais das equações de Maxwell. Aqui vamos apenas apresentar uma interpretacão geometrica objetivando dar subsídios à intuicão relativamente aos fenômenos físicos que envolvem este Teorema.

Vamos analisar uma situacão simple como a representada abaixo



$\Longrightarrow$ Considere a superfície retandular S (contornada pela linha mais escura), dividida por elemendos de áreas dA.

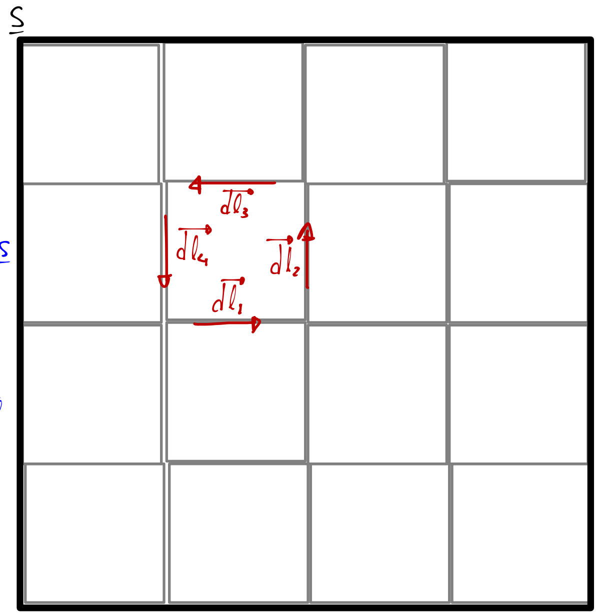
O teorema de Stokes retrata o fatoto de que somando-se todas as integrais de linha ao redor das areas elementares dA_i tem-se como resultado a integral de linha em torno da área global.

Mas porquê?

Em uma área qualque temos, por definicão:

$$\boxed{(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{m} = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}}$$

"Vamos considerar $\hat{m}$ saindo da página, em nosso exemplo".



Se considerarmos cada elemento de aria como sendo infinitamente pequeno, então podemos escrever, para cada retângulo ao lado, que

$$\lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{A}\sum_{\text{lado } i}\vec{F}_i\cdot\vec{l}_i$$

$\Downarrow$

Podemos então escrever:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n} = \frac{1}{A}\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{l}_i$$

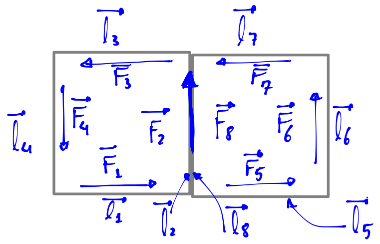
Integrando sobre toda a área global:

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \sum_{\text{retângulos } j}\left(\frac{1}{A}\sum_i \vec{F}_j\cdot\vec{l}_i\right)_j$$

<u>Obs:</u> O índice i varia de $1 \to 4$ lados do j-ésimo retângulo.

O índice j refere-se a cada retângulo.

$\Rightarrow$ Então vamos realizar as somas acima. Comecemos com dois lados adjacentes quaisquer.



Como $\hat{n}$ foi considerado para fora da página, vamos realizar a integral de linha de forma anti-horária para coincidir com a regra da mão direita presente no produto vetorial $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

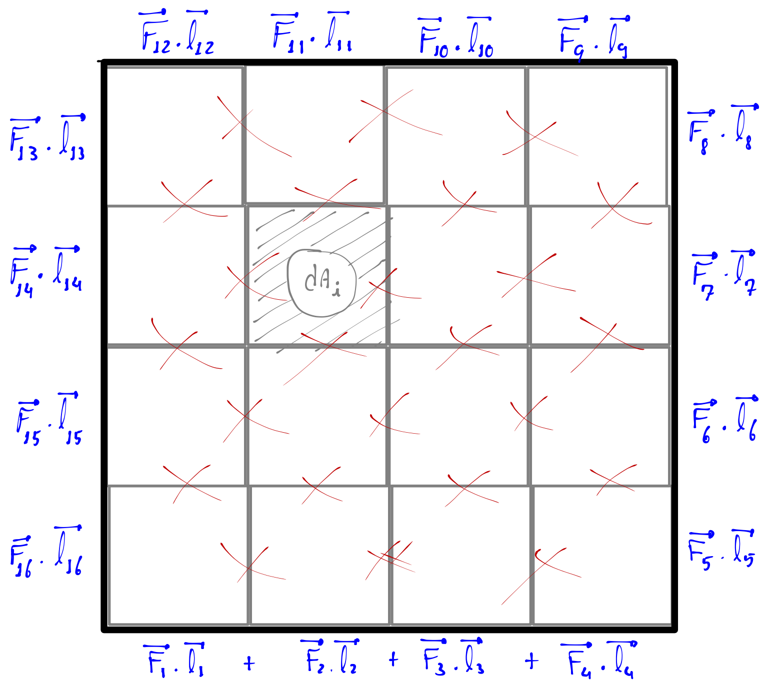
Então temos, para esses lados, que:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{l}_i\right)_j = \underbrace{\vec{F}_1\cdot\vec{l}_1 + \vec{F}_2\cdot\vec{l}_2 + \vec{F}_3\cdot\vec{l}_3 + \vec{F}_4\cdot\vec{l}_4}_{j=1} + \underbrace{\vec{F}_5\cdot\vec{l}_5 + \vec{F}_6\cdot\vec{l}_6 + \vec{F}_7\cdot\vec{l}_7 + \vec{F}_8\cdot\vec{l}_8}_{j=2}$$

$\Rightarrow$ Note que no lado que é comum aos dois elementos de volume o vetor $\vec{F}$ possui mesma intensidade e mesmo sentido, contudo a integração anti-horária introduz $\vec{l}_2$ em sentido oposto ao $\vec{l}_8$; portanto

$\vec{F}_2\cdot\vec{l}_2 = -\vec{F}_8\cdot\vec{l}_8$, e estes termos se cancelam na soma acima, tal que só permanecem os lados externos 1, 3, 4, 5, 6 e 7.

Propagando este procedimento para todos os elementos de volume, ocorre que todos os lados comuns se cancelam mutuamente restando, ao final de toda a soma em j, apenas os lados "solitários" (que não possuem fronteira com vizinhos dentro da superfície considerada). Desta forma, para S temos:



Então $\displaystyle\oint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{m}\,dA = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i\cdot d\vec{l}_i}$

↳ sobrando apenas os lados externos de S.

$\Rightarrow$ é o mesmo que $\boxed{\displaystyle\oint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{m}\,dA = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}}$.

O teorema da divergência

Assim como o teorema de Stokes, o teorema da divergência refere-se a uma soma dos divergentes dentro de um volume resultando na integral de fluxo através da superfície externa que delimita o volume em questão, como segue:

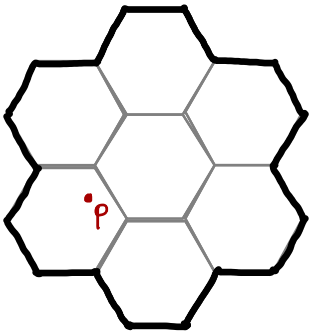
$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA}$$

Uma análise sobre esta igualdade "deve" ser realizada a partir de $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, que é uma condição pontual (densidade volumétrica de fluxo de $\vec{F}$).

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{F} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA .$$

Desenvolvendo o limitando do lado direito par alguns elementos de volume, digamos:

V

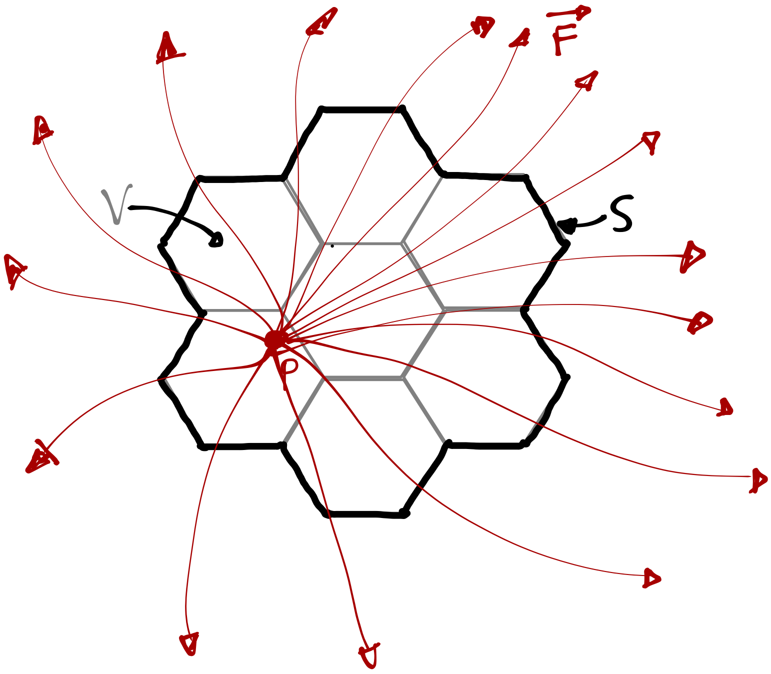


$\Rightarrow$ Vamos considerar um camo vetorial $\vec{F}$ originado no ponto P em uma posição qualquer dentro do "volume" V.

Esse campo vetorial $\vec{F}$ pode ter uma origem qualquer:

1 - Carga elétrica gerando campo elétrico
2 - Partícula massiva gerando campo gravitacional
3 - "Pequena" bolha de ar explodindo e criando, momentaneamente, um campo de velocidade de partículas.
4 - Uma fonte de água, onde água surge do nada, gerando um campo de velocidades (correnteza).
5 - etc...

Podemos representar esquematicamente como segue:



Observe que na região interna ao volume (repesentado aqui em duas dimensões) qualquer fronteira entre dois elementos de volume representa um fluxo negativo para um elemento e um fluxo positivo para o outro. Considerando elementos de volumes infinitamente pequenos,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

volume infinitamente pequeno.

então os fluxos em uma mesma fronteira têm mesma intensidade, pois trata-se de um ponto no espaço. Em outras palavras, o vetor $\vec{F}$ não muda seu valor nem seu sentido em uma fronteira qualquer. Sendo assim

> "Os fluxos de fronteiras internas ao volume se cancelam".

Adicionalmente, as fronteiras externas, as que não estão em contato com outros elementos de volume pertencentes ao volume delimitado pela superfície $\underline{S}$ são exatamente as fronteiras que compõem a superfície externa ao volume V. Então, como todos os fluxos internos cancelam-se aos pares

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

Fluxo apenas na fronteira externa.

Soma de todos os fluxos dentro do volume $\underline{V}$.

Obs: Restam as identidades 12, 13, 14 e 15.

Término em breve.