T.E - Análise Vetorial

* Definir os conceitos de grandezas escalares e vetoriais.

Algebra Vetorial - "Contas com vetores"

Gradiente de uma função escalar.

Dada uma função escalar $\varphi(x,y,z)$, define-se o gradiente desta função como sendo a taxa de variação de $\varphi(x,y,z)$ em cada "direção" $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ independentemente.

Em outras palavras, queremos uma expressão que moste o comportamento da variação dos valores de φ em cada dimensão. Sendo assim, uma informação vetorial.

$$\Rightarrow \text{Grad.}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z)\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,z)\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,y,z)\,\hat{k}$$

Comumente utiliza-se o símbolo $\vec{\nabla}$ em lugar de Grad, tal que

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\varphi(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Outras características da operação $\vec{\nabla}\varphi$.

"Superfícies equipotenciais"

"Aqui difinimos que se valores diferentes das variáveis x, y e z; que retornam um mesmo valor para a função $\varphi(x,y,z)$; então o valor específico de φ é um potencial, e o conjunto de pontos no espaço associados a um mesmos valor de φ formam uma superfície equipotencial".

$\Rightarrow$ A direção coincidente com a direção do vetor grad (φ) corresponde à direção de variação máxima da função $\varphi(x,y,z)$.

Em outras palavras, máxima variação nos valores de φ é obtida quando se toma variações Δx, Δy e Δz tal que $\Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$ tenha mesma direção que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$.

Prova: Vamos considerar o produto escalar entre $\nabla\varphi$ e um vetor $\hat{u}$ (unitário) em um sentido qualquer.

$$\Rightarrow (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\hat{u} = \|\vec{\nabla}\varphi\|\cos(\theta)$$

, que representa a intensidade do vetor $\nabla\varphi$ (taxa de variação de φ) no sentido $\hat{u}$.

$\Rightarrow$ Se $\theta = 90°$ $\Rightarrow$ estamos considerando uma direção na qual $\nabla\varphi$ não possui componente, ou seja, $(\vec{\nabla}\varphi)_{\hat{u}} = $ zero não produzindo variação em φ.
$\Rightarrow$ estas direções representam <u>superfícies equipotenciais</u>.

Por outro lado, se $\theta = 0$, estamos considerando a direção de máxima variação de φ, ou seja, mesma direção denotada pelo vetor $\vec{\nabla}\varphi$.

Notar que: $$\underbrace{D_u \varphi}_{\text{derivada de } \varphi \text{ na direção } \hat{u}.} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi\hat{k}\right)\cdot \hat{u}$$

Portanto, $(\vec{\nabla}\varphi)\cdot\hat{u}$ representa o quanto φ varia no sentido $\hat{u}$.

Exemplo:

Vamos considerar uma equação específica, digamos:

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

Esta equação representa elipses. Para cada valor fixo de $\varphi(x,y)$ temos uma superfície equipotencial (valores de $\varphi(x,y)$ não se alteram).

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right]\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right]\hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y) = \underbrace{\frac{2x}{4}}_{\text{taxa de variação de } \varphi(x,y) \text{ relativa a variações da variável } x.}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{2y}{9}}_{\text{taxa de variação de } \varphi(x,y) \text{ relativa a variações da variável } y.}\hat{\jmath}$$

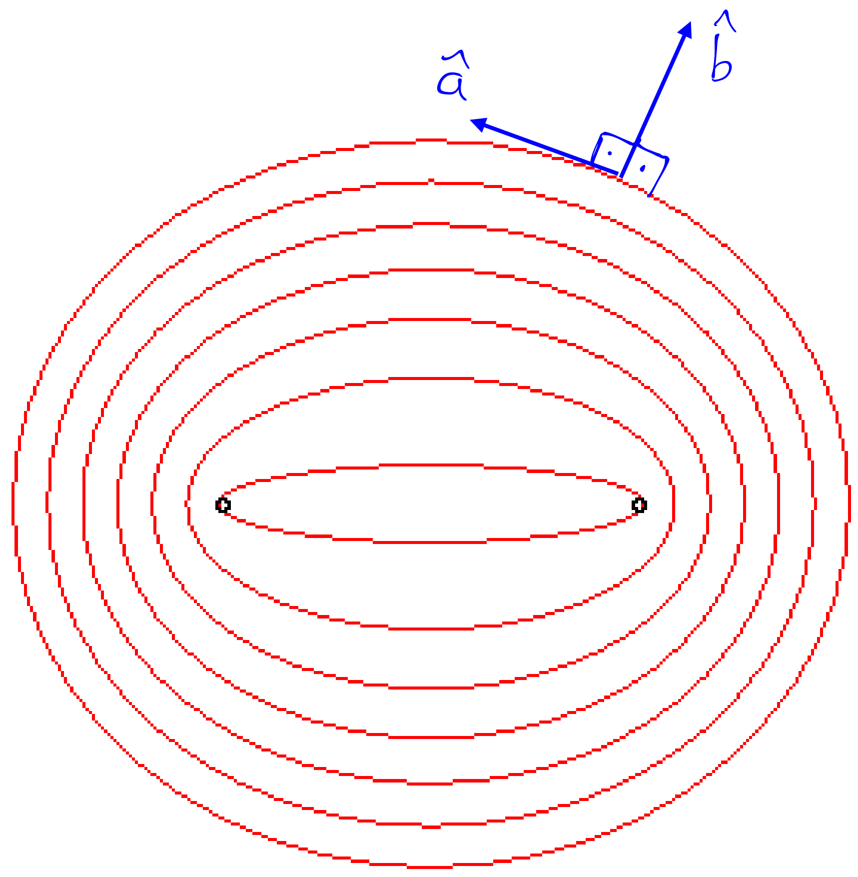
Note que, como se trata de uma relação vetorial, cada componente colabora independentemente (pois y e x não dependem entre si) para variações de $\varphi(x,y)$. Adicionalmente, é possível que haja acréscimo em φ devido à variação em x e decréscimo devido à variações em y, resultando em uma variação total nula; a direção vetorial que faz essa compensação acontecer é a direção coincidente com uma superfície equipotencial.

O módulo do vetor gradiente é dado por:

$$|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

$$|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2y}{9}\right)^2} \quad ;$$

Esta expressão significa: Para cada par (x,y), $|\vec{\nabla}\varphi|$ representa a taxa máxima de variação nos valores de $\varphi(x,y)$ — tal que esta variação ocorre em uma direção perpendicular às superfícies equipotenciais.



⇒ Cada linha vermelha representa uma superfície equipotencial. Os vetores unitários $\hat{a}$ e $\hat{b}$ estão paralelo e perpendicular, respectivamente, à uma das superfícies equipotenciais.

⇒ O vetor $\hat{b}$ coincide com o vetor $\vec{\nabla}\varphi$ e é esta direção que resulta maiores variações nos valores de $\varphi(x,y)$.

Seria possível, dado um par (x_0, y_0), encontrar a direção de variação nula?

⇒ Vejamos: $$\left(\frac{2x_0}{4}\hat{\imath} + \frac{2y_0}{9}\hat{\jmath}\right)\cdot\left(\alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}\right) = 0$$

$$\frac{2x_0\alpha}{4} + \frac{2y_0\beta}{9} = 0$$

⇒ dado um valor $\beta \equiv \beta_0$ ⇒ $\alpha = -\frac{4}{\cancel{2}x_0}\,\frac{\cancel{2}y_0\beta_0}{9}$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{4y_0\beta_0}{9x_0}$$

Conferindo: $\left(\frac{2x_0}{4}\hat{\imath} + \frac{2y_0}{9}\hat{\jmath}\right)\cdot\left(-\frac{4y_0\beta_0}{9x_0}\hat{\imath} + \beta_0\hat{\jmath}\right) =$

$$= -\frac{2\cancel{x_0}}{4}\cdot\frac{4y_0\beta_0}{9\cancel{x_0}} + \frac{2y_0}{9}\beta_0 = -\frac{2}{9}y_0\beta_0 + \frac{2}{9}y_0\beta_0 = \text{zero}.$$

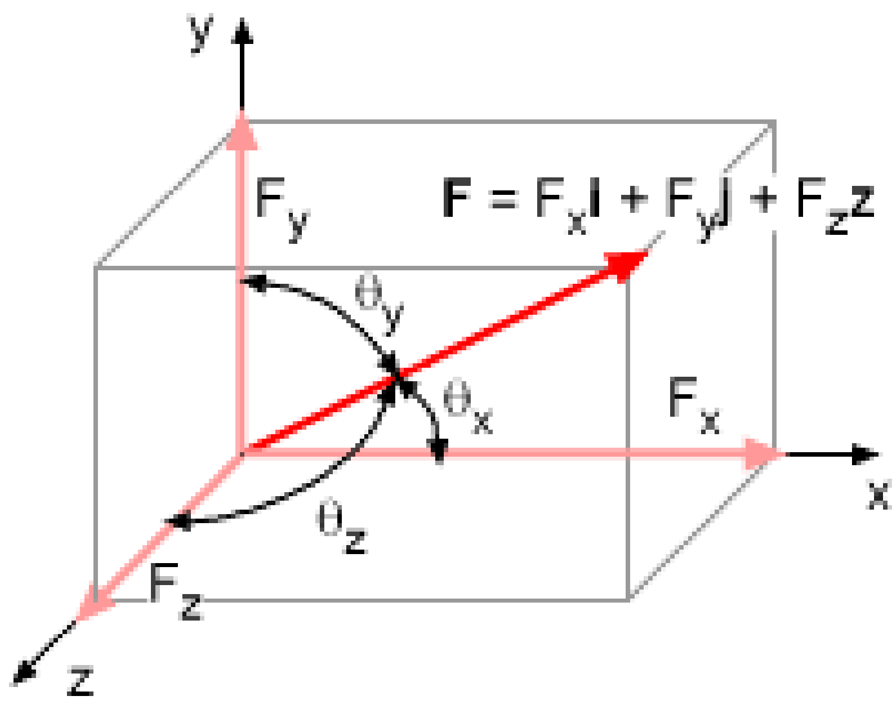
"dizendo" que o vetor $\alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath} = -\frac{4y_0\beta_0}{9x_0}\hat{\imath} + \beta_0\hat{\jmath}$ é perpendicular à $\vec{\nabla}\psi$.

— // —

Derivada Direcional: (Taxa de variação de ψ em uma direção arbitrária)

Consideremos um vetor qualquer dado por:

$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = |F|.\cos(\theta_x)\hat{\imath} + |F|\cos(\theta_y)\hat{\jmath} + |F|\cos(\theta_z)\hat{k}$, como representado na Fig. abaixo.



https://ecourses.ou.edu/cgi-bin/ebook.cgi?doc=&topic=st&chap_sec=02.3&page=theory

$\Rightarrow$ Um vetor unitário qualquer pode ser escrito na forma:

$$\hat{u} = \frac{\vec{F}}{|F|} = \cos(\theta_x)\hat{\imath} + \cos(\theta_y)\hat{\jmath} + \cos(\theta_z)\hat{k}$$

sendo $|\hat{u}| = \sqrt{\cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_z)} = 1$

Pergunta: Qual é a taxa de variação de uma função $\psi(x,y,z)$ na direção de $\hat{u}$?

Vamos considerar um incrementos nos valores de x, y, z que resultem em uma variação colinear com o vetor $\underline{\hat{u}}$.

$$\Rightarrow d\vec{s} = \varepsilon\hat{u} = \varepsilon\left(\cos(\theta_x)\hat{\imath} + \cos(\theta_y)\hat{\jmath} + \cos(\theta_z)\hat{k}\right)$$

Onde ε corresponde a um incremento infinitesimal.

$$\Rightarrow d\vec{s} = \underbrace{\varepsilon\cos(\theta_x)\hat{\imath}}_{\text{Componente de } d\vec{s} \text{ no sentido do eixo } \underline{x}.} + \underbrace{\varepsilon\cos(\theta_y)\hat{\jmath}}_{\text{Componente de } d\vec{s} \text{ no sentido do eixo } y.} + \underbrace{\varepsilon\cos(\theta_z)\hat{k}}_{\text{Componente de } d\vec{s} \text{ no sentido do eixo } z.}$$

$$\varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u}) = \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\varepsilon\cdot\cos(\theta_x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\varepsilon\cos(\theta_y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\varepsilon\cos(\theta_z) + \text{Termos superiores.}$$

Obs: φ foi expandido em série de Taylor em torno de ε = zero.

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u}) - \varphi(\vec{r})}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\cos(\theta_x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\theta_y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\cos(\theta_z) + \text{termos de ordem superiores}$$

Aplicando limite com $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u}) - \varphi(\vec{r})}{\varepsilon}\right)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\cos(\theta_x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\theta_y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\cos(\theta_z) + \underbrace{\cancel{\text{termos de ordem superiore}}}_{\text{zero}}$$

↳ derivada de φ na direção de $\hat{u}$.

$$D_u\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\cos(\theta_x)\hat{\imath} + \cos(\theta_y)\hat{\jmath} + \cos(\theta_z)\hat{k}\right)$$

$$D_u\varphi(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{u}$$

Ou seja, o produto escalar entre o gradiente de uma função escalar φ e um vetor unitário $\underline{\hat{u}}$ corresponde à intensidade de variação da função na direção de $\underline{\hat{u}}$.

Divergente

Assim como no caso do operador gradiente, entre outros, o operador divergente corresponde a uma operação matemática que, em nosso contexto, tem por objetivo representar uma situação física, ou seja, um processo que acontece comumente na natureza. Vamos introduzir este conceito fisicamente antes de matematicamente.

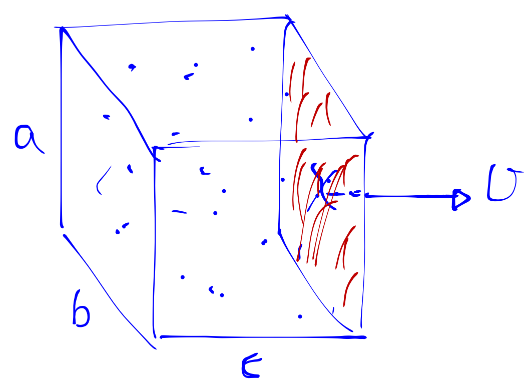
Vamos antes entender o termo fluxo através de uma superfície.

Fluxo: Considere vento soprando e uma janela aberta. Qual seria o fluxo de partículas (vento) através da janela?

Antes de qualquer cálculo, é intuitivo imaginarmos o fluxo será maior quando o vento for perpendicular ao plano da janela e que será nulo quando o vento for paralelo ao plano da janela.

Cálculo do número de partículas passando por unidade de tempo.

$\Rightarrow$ Se temos n particular em uma unidade de volume e esse volume viaja com velocidade v (velocidade do vento), então na direção de propagação do vento temos que:



temos, no volume acima, $n.a.b.c$ partículas, e levarão um tempo $t = \frac{c}{v}$ para atravessarem um plano perpendicular (Plano rachurado com área a.b).

Pela área $a.b$ passam $\frac{n.a.b.c}{t}$ partículas por segundo.

Mas fluxo é: Partículas por segundo e por unidade de área, logo:

Fluxo por uma superfície perpendicular à velocidade do vento é

$$\frac{\text{Fluxo}}{\text{Área}} = \frac{n.a.b.c}{a.b.t} \qquad \text{sendo } a.b = \text{área}.$$

$\Rightarrow$ Como $t = \frac{c}{v}$

$$\Rightarrow \frac{\text{Fluxo}}{\text{Área}} = \frac{m \cdot \cancel{c}}{\cancel{c}} \cdot v$$

$$\frac{\text{Fluxo}}{\text{Área}} = m \cdot v$$ "Através de uma superfície perpendicular.

e o Fluxo atravez de uma área qualquer com inclinação relativa à direção do vento é

Fluxo total $= m \cdot \vec{v} \cdot \vec{A}$, tal que se $\vec{A}$ for perpendicular a $\vec{v}$
$\Rightarrow$ Fluxo $=$ zero.

—"—

Em geral, o fluxo de um vetor $\vec{V}$ através de uma área $\vec{A}$ é dado por

$$\text{Fluxo} = \vec{V} \cdot \vec{A}$$

Para uma área irregular e/ou um vetor $\vec{V}$ não uniforme:

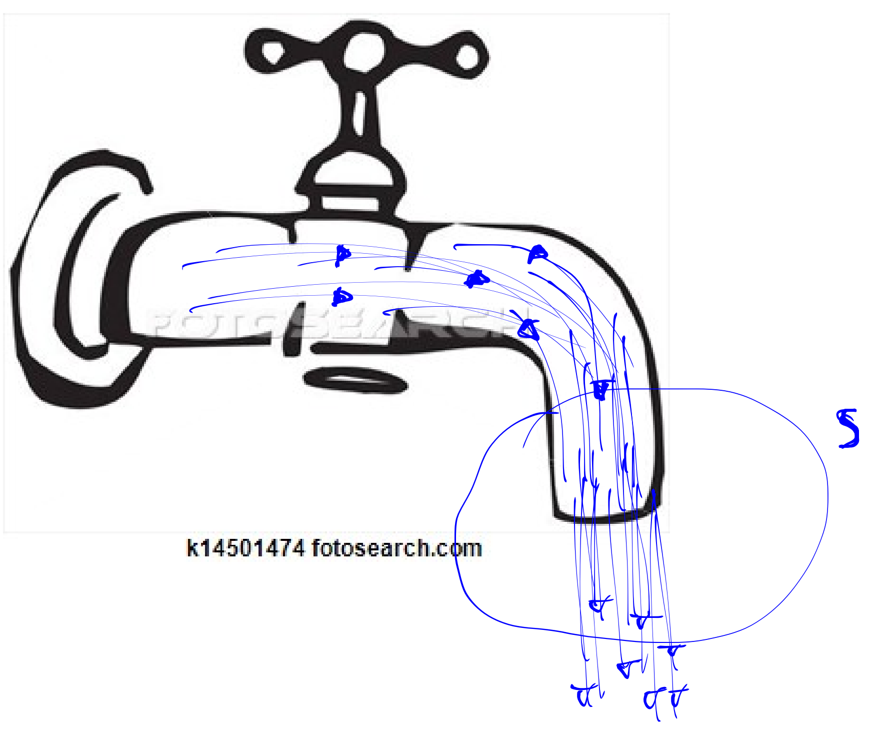
$$\text{Fluxo} = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A}$$, onde a integral deve ser tomada por toda a superfície $\underline{S}$ atravessada pelo vetor $\vec{V}$.

—"—

★ Fluxo através de uma superfície fechada.

É menos comum no dia a dia verificarmos situações onde o fluxo através de uma superfície fechada não seja nulo. Isso porque, em geral, o que entra por um lado sai por outro fazendo resultar em fluxo líquido nulo.

Exemplo, se fecharmos uma superfície em torno da "boca" de uma torneira a fim de medirmos o fluxo de água, teremos:

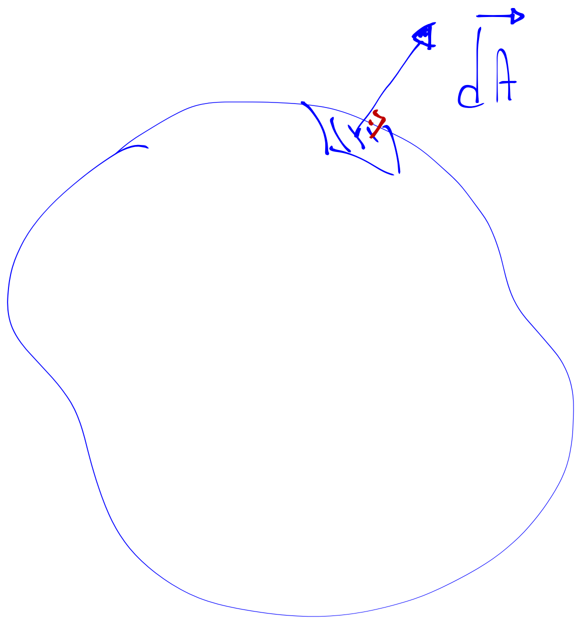


$\Rightarrow$ Como a superfície $\underline{S}$ é fechada a água que sai pelo lado de baixo é a mesma que entra pelo lado de cima, fazendo resultar em fluxo total nulo.

Como antes o fluxo $(\equiv \Phi)$, devido a um campo vetorial $\vec{V}$ atravessando uma superfície fechada $\underline{S}$ é dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

sendo $d\vec{A}$ definido como vetor normal à superfície $\underline{S}$ apontando de dentro para fora da superfície fechada S.



$d\vec{A} = dA\,\hat{n}$ sendo $\hat{n}$ um vetor unitário perpendicular à superfície $\underline{S}$, no sentido "dentro para fora".

$$\Rightarrow \Phi = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dA$$

É fácil notar, no exemplo da torneira, que no lado de cima $\vec{V} \cdot \hat{n}\, dA = V\, dA \cos(180°) = -V\, dA$ (fluxo negativo, entrando) e no lado de baixo $\vec{V} \cdot \hat{n}\, dA = V\, dA \cos(0°) = +V\, dA$ (fluxo positivo, saindo de S).

O que isso tem a ver com <u>Divergente</u>?

Existem situações físicas onde o fluxo líquido não é nulo. "Entra mais do que sai ou sai mais do que entra".

Exemplo: Uma bola de futebol cheia de ar quando fura possui, neste momento apenas fluxo positivo de partículas, pois apenas sai ar. Diz-se que as partículas estão divergindo.

<u>Obs:</u> Notar que se analisarmos este exemplo levando em conta todo o histórico

da bola (temporal), então teríamos um fluxo nulo pois o ar que sai um dia entrou.

★ **Divergente**: É comum, devido a maior generalização, se colocar os conceitos físicos de forma pontual (infinitesimal), tal que qualquer situação real seja tomada como a soma (integral) de todas as contribuições. No caso do fluxo por uma superfície fechada - define-se:

Φ = fluxo por unidade de volume de uma superfície de fechada infinitamente pequena

Ou seja, $\operatorname{div}(\vec{F}) \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \cdot \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$ "divide-se pelo volume e aplica-se o limite, sendo $\underline{V}$ o volume delimitado pela superfície $\underline{S}$".