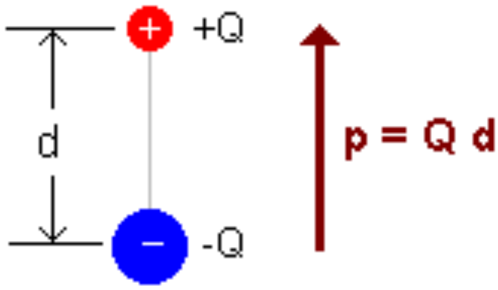
# Dipolo Elétrico

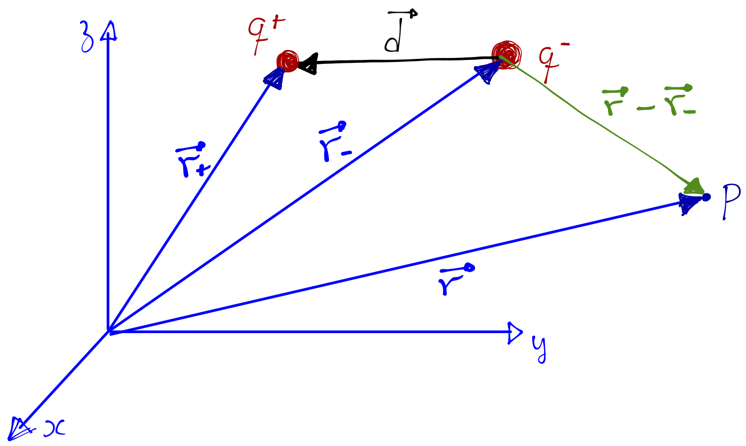
Na natureza é comum a ocorrência de concentrações de cargas com diferentes sinais, separadas por uma distância muito pequena se comparada com o alcance de influência significativa de seus campos (elétrico ou magnético).

Nosso objetivo aqui é obter o campo elétrico gerado por um dipolo elétrico.

Um dipolo elétrico $\vec{P}$ é definido para um sistema de duas cargas (ou dois centros geométricos de distribuições de cargas) com mesmo módulo e sinais contrários, distanciados por $\underline{d}$, como na Figura abaixo:




Queremos obter o campo elétrico em um ponto $\underline{P}$ do espaço.



$$\vec{E} = K_e \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Para o nosso caso:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K_e \frac{q^+(\vec{r} - \vec{r}_+)}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} + K_e \frac{q^-(\vec{r} - \vec{r}_-)}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3}$$

Inserindo a distância $\vec{d}$ entre as cargas: $\Rightarrow$ $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$, o que define $\vec{d}$ saindo da carga negativa para a positiva.

Portanto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K_e \, q \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_-)}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right]$$

Esta equação fornece o campo exato em qualquer ponto do espaço, incluindo pontos com $|\vec{r}| \sim |\vec{d}|$. Queremos dipolos com $\underline{d}$ muito pequenos. Neste caso podemos expandir em série de Taylor em torno de $|\vec{d}| = 0$, como segue:

Expansão do denominador $|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^{-3} \equiv dem.^{-1}$

$$dem^{-1} = \left( |\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^2 \right)^{-3/2}$$

$$dem.^{-1} = \left[ (\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}) \right]^{-3/2} \qquad \text{se} \quad \vec{r} - \vec{r}_- \equiv \vec{a}$$

$$dem^{-1} = \left[ (\vec{a} - \vec{d}) \cdot (\vec{a} - \vec{d}) \right]^{-3/2} = \left[ \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} \right]^{-3/2}$$

$$dem^{-1} = \left[ a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{d} + d^2 \right]^{-3/2}$$

$$\text{ou} \quad dem^{-1} = \left[ |\vec{r} - \vec{r}_-|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}_-) \cdot \vec{d} + d^2 \right]^{-3/2}$$

$$\Rightarrow dem^{-1} = |\vec{r} - \vec{r}_-|^{-3} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_-) \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^2} \right]^{-3/2}$$

O termo $\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-3/2}$ contém $d$. Vamos então expandi-lo em série de Taylor:

Se fizermos $x \equiv -\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}$, temos algo do tipo

$$\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-3/2} = (1+x)^n \quad \text{sendo } n = -3/2$$

Vamos expandir $f(x) = (1+x)^n$, depois retornamos com os parâmetros originais.

$$\Rightarrow f(x) = f(x)\Big|_{x=0} + f'(x)\Big|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2} f''(x)\Big|_{x=0} x^2 + \dots$$

$$f(x) = (1+x)^n \longrightarrow f(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \longrightarrow f'(x)\Big|_{x=0} = n$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{(n-2)} \longrightarrow f''(x)\Big|_{x=0} = n(n-1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1) \cdot x^2 + \dots$$

Voltando:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}\left(-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right) + \text{termo 2ª ordem} + \dots$$

Obs: Mantém-se o termo de segunda ordem nos casos quando o termo de 1ª ordem zera – não foi o caso.

Adicionalmente, o termo $\frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} \ll \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}$, pois conta com $\underline{d^2}$.

Assim, podemos dizer que se $r \gg d$, então

$$\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-3/2} \approx 1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}$$

Voltando ao denominador:

$$\text{den}^{-1} = \overbrace{|\vec{r}-\vec{r}_-|^{-3}\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-3/2}}^{\text{Antes da expansão.}} \approx \overbrace{|\vec{r}-\vec{r}_-|^{-3}\cdot\left[1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]}^{\text{Após a expansão.}}$$

Voltando com o numerador, relativo a este termo:

$$\Rightarrow \frac{(\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d})}{\text{den}} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\cdot\left[1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]$$

$$= \frac{(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right] - \underbrace{\frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}}\left[1 + \underbrace{\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}}\right]$$

A multiplicação destes fatores resulta, mavamente em $\propto d^2$ podendo, portanto, ser desprezado relativamente aos termos proporcionais à $d$.

$$\Rightarrow \frac{(\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}|^3} \cong \frac{(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right] - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}$$

Voltemos com esta expressão na equação original:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e\, q\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \approx k_e q \left\{ \frac{\cancel{(\vec{r}-\vec{r}_-)}}{\cancel{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}} \left[ 1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} \right] - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} - \left[ \frac{\cancel{(\vec{r}-\vec{r}_-)}}{\cancel{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}} \right] \right\}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx k_e q \left\{ \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^5}(\vec{r}-\vec{r}_-) - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} \right\}$$

Como definimos o momento de dipolo por $\vec{p} = q\vec{d}$:

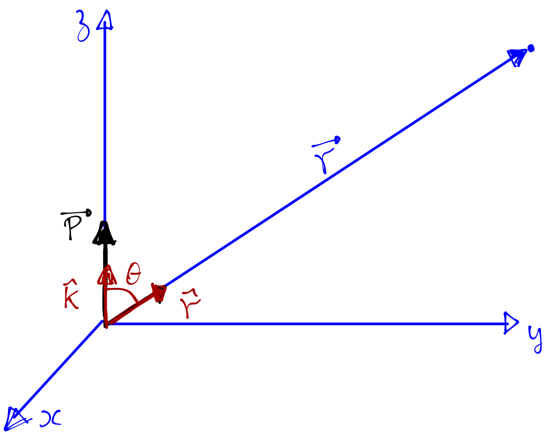
$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^5}(\vec{r}-\vec{r}_-) - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} \right\}$$

Se colocarmos a carga negativa na origem $(\vec{r}_- = \vec{0})$ e considerarmos um dipolo pontual, podemos dizer que $\vec{r}$ é sempre muito grande com relação a $\underline{d}$, tal que podemos abandonar o símbolo de aproximação $(\approx)$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\,\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

Orientando $\vec{p}$ no sentido positivo de $\underline{z}$, tal que: $\vec{p} = p\hat{k}$;

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3rp\,\hat{r}\cdot\hat{k}}{r^4}\hat{r} - \frac{p}{r^3}\hat{k} \right\}$$




$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p\cos(\theta)}{r^3}\hat{r} - \frac{p}{r^3}\hat{k} \right\}}$$

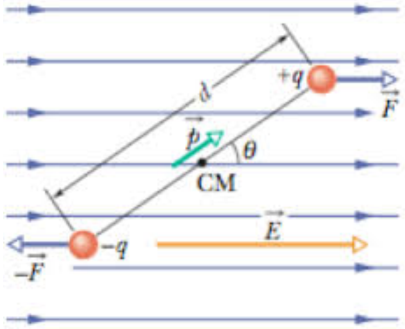
Note que no plano perpendicular ao eixo do dipolo, e que passa pelo dipolo, o ângulo $\underline{\theta}$ é 90°, tal que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{k}$$

ou $$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\boxed{\text{“Porque o sinal negativo?”}}$

## Torque em um dipolo elétrico




$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$, onde $\vec{r}$ é o vetor que liga o o ponto em torno do qual o sistema tende a girar, ao ponto onde a força é aplicada.

Neste caso temos dois pontos de aplicação de $\vec{F}$, tal que:

$$\vec{\tau}_{res.} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

Definindo $\vec{r}_1$ para $+q$ e $\vec{r}_2$ para $-q$:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(\frac{d}{2}\cos(\theta)\,\hat{\imath} + \frac{d}{2}\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}\right) \times \left(qE\,\hat{\imath}\right)$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(-\frac{d}{2}\cos(\theta)\,\hat{\imath} - \frac{d}{2}\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}\right) \times \left(-qE\,\hat{\imath}\right) \qquad \text{"}q = |q|\text{"}$$

$$\vec{\tau}_1 = -\frac{d}{2}\operatorname{sen}(\theta)\,qE\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = -\frac{d}{2}\operatorname{sen}(\theta)\,qE\,\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -d\operatorname{sen}(\theta)\,qE\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = -pE\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

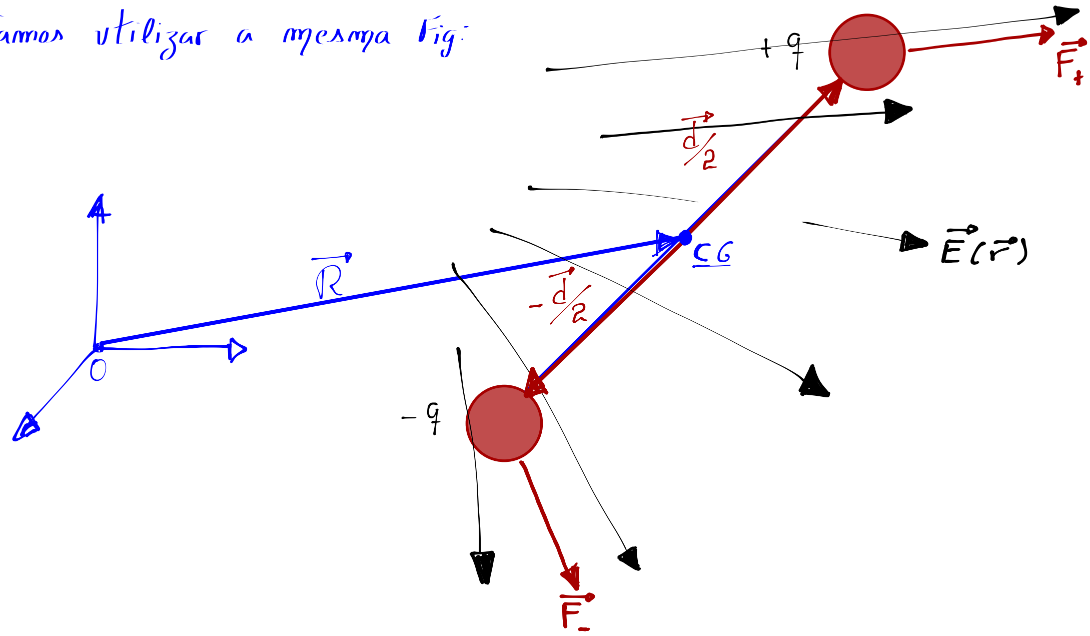
Este resultado representa o torque sobre um dipolo elétrico submetido a um campo elétrico $\vec{E}$ uniforme na região do dipolo. Entretanto, quando o dipolo elétrico é, por exemplo, uma molécula que compõe um material qualquer, ele fica sujeito ao chamado campo cristalino, que corresponde ao campo elétrico sobre o dipolo (ou qualquer outro constituindo do material) proveniente da distribuição de cargas elétricas em sua vizinhança imediata (primeiros vizinhos, como se diz na física do estado sólido). Nestes ambientes o campo elétrico não é, em geral, uniforme sobre o dipolo elétrico e o torque sobre ele deve levar este fato em consideração.

# Problema

Quando um dipolo está sob a ação de um campo elétrico não uniforme, então tanto a intensidade quanto o sentido das forças em cada carga podem ser diferentes. Nestas condições o dipolo, se estiver livre (diferente do problema anterior), tende a girar em torno de um ponto que não está no centro geométrico.

⇨ Neste problema, vamos calcular o torque relativamente ao centro de nosso sistema referencial (que pode estar em um ponto qualquer do espaço)

⇨ Vamos utilizar a mesma fig:




O torque relativo ao centro do sistema referencial é:

$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$ , onde $\vec{R}$ localiza o centro geométrico do dipolo e $\vec{F}$ corresponde à força total sobre o dipolo elétrico.

Obter $\vec{F}$:

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q} = \vec{E}_{+q} \cdot q - \vec{E}_{-q} \cdot q = q\left(\vec{E}_{+q} - \vec{E}_{-q}\right)$$

Precisamos conhecer os campos que atuam na posição de cada carga elétrica $\vec{E}_{+q}$ e $\vec{E}_{-q}$.

Obtenção dos campos.

$$\vec{E}_{+q} = E_x^{+q}\hat{\imath} + E_y^{+q}\hat{\jmath} + E_z^{+q}\hat{k}$$

Vamos supor conhecido o campo no centro geométrico, e tentar obter cada componente do campo no ponto de cada carga.

$\Rightarrow$ Fazendo $\vec{R} = X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath} + Z\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{R}) = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{\jmath}$$

Como $d \ll R$, vamos obter cada componente do campo elétrico no ponto de cada carga:

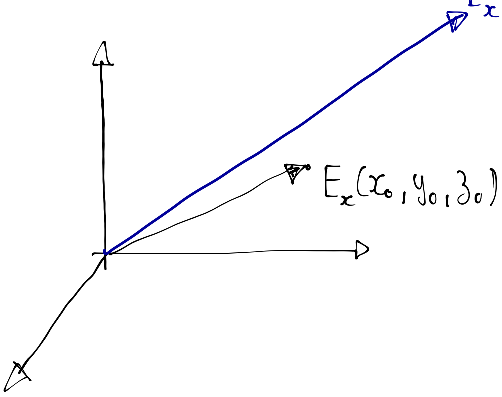
Para a carga positiva:

Qual o valor de $E_x^+$ ?

$$E_x^+ = E_{x_{CG}} + \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{d_x}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{d_y}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{d_z}{2}}_{\text{O que significa isso?}}$$

Análise: Para obter-se o valor de uma função escalar (cada componente do campo elétrico é uma função escalar) deve-se considerar a taxa de variação na direção do deslocamento.

Exemplo:




$$E_x(x,y,z) \Rightarrow E_x(x,y,z) \cong E_x(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x-x_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y}(y-y_0)\cdot\Delta y + \frac{\partial E_z}{\partial z}(z-z_0)\Delta z$$

"Aproximando em 1ª ordem"

Em nosso caso os deslocamentos correspondem à projeção de metade do vetor $\vec{d}$ (Ponto de referência é o meio do comprimento $d$), ou seja, $\frac{d_x}{2}$ no sentido de $\underline{x}$, $\frac{d_y}{2}$ no sentido de $\underline{y}$ e $\frac{d_z}{2}$ no sentido $z$.

Obs: $d_x$, $d_y$ e $d_z$ são as projeções do vetor $\vec{d}$ (que liga as cargas) nos sentidos coordenados.

Portanto:

$$E_x^+ = E_{x_{CG}} + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{d_x}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{d_y}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

$$E_y^+ = E_{y_{CG}} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{d_x}{2} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{d_y}{2} + \frac{\partial E_y}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

$$E_z^+ = E_{z_{CG}} + \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{d_x}{2} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{d_y}{2} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

Para as componentes de $\vec{E}^-$:

$$E_x^- = E_{x_{CG}} - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{d_x}{2} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{d_y}{2} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

$$E_y^- = E_{y_{CG}} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{d_x}{2} - \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{d_y}{2} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

$$E_z^- = E_{z_{CG}} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{d_x}{2} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{d_y}{2} - \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{d_z}{2}$$

Vimos que $\vec{F} = q\,(\vec{E}_{+q} - \vec{E}_{-q})$

A componente $\underline{x}$ de $\vec{F}$ é:

$F_x = q\left(E_x^+ - E_x^-\right)$ Somando:

$$F_x = q\left\{\left(E_{x_{CG}} + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{d_x}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{d_y}{2} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{d_z}{2}\right) - \left(E_{x_{CG}} - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{d_x}{2} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{d_y}{2} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{d_z}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad F_x = q\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} d_z \right)$$

então: $$F_y = q\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} d_z \right)$$

e $$F_z = q\left( \frac{\partial E_z}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} d_z \right)$$

$$\vec{F} = q\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} d_z \right)\hat{\imath} + q\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} d_z \right)\hat{\jmath}$$

$$+ q\left( \frac{\partial E_z}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} d_z \right)\hat{k}$$

Notar que:

$$\vec{F_x} = q\left( d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_x \,\hat{\imath}$$

$$\vec{F_y} = q\left( d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_y \,\hat{\imath}$$

$$\vec{F_z} = q\left( d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_z \,\hat{\imath}$$

Ou seja, podemos escrever $\vec{F}$ na forma:

$$\vec{F} = q\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Portanto, o torque é

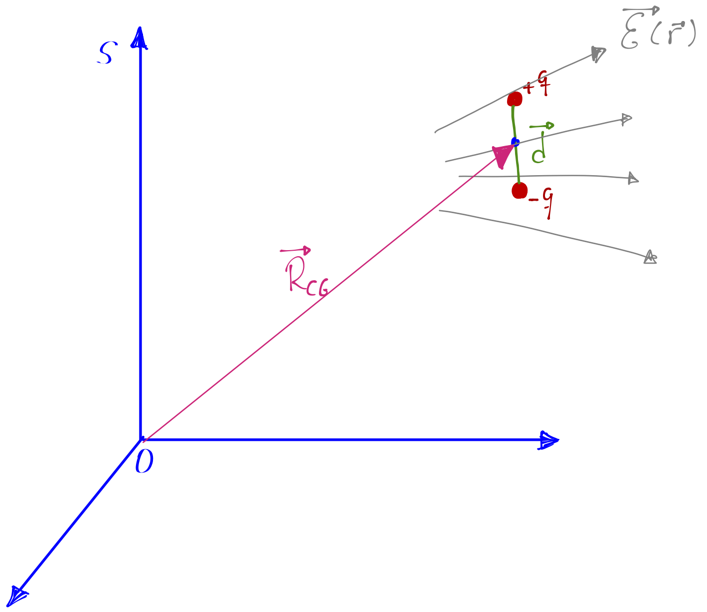
$$\boxed{\vec{\tau}_c = \vec{R} \times \left[\left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}\right]} \,.$$

Note que $\vec{P}\cdot\vec{\nabla}$ é um operador que atuará derivando cada componente do campo elétrico. Portanto, se o campo elétrico for constante $\Longrightarrow \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} = 0$, tal que não haverá tendência de rotação do centro Geométrico das cargas (consequentemente do dipolo) em relação a outro ponto do espaço fora de $\vec{R}$.

Noentanto, pode haver torque relativo ao centro geométrico das cargas.
Efetivamente, vimos que para um campo elétrico uniforme existe um torque relativo ao centro geométrico dado por:

$$\vec{T}_{CG} = \vec{P} \times \vec{E}.$$

Em geral podemos pensar da seguinte forma:




$\Rightarrow$ O dipolo sofre um torque que tende a fazê-lo girar em torno do seu centro geométrico de cargas dado por:

$$\vec{T}_{CG} \approx \vec{P} \times \vec{E},$$

e um torque que tende a fazê-lo girar em torno do centro do sistema referencial $S$ dado por

$$\vec{T} = \vec{R} \times [\vec{P} \cdot \vec{\nabla}]\vec{E}.$$

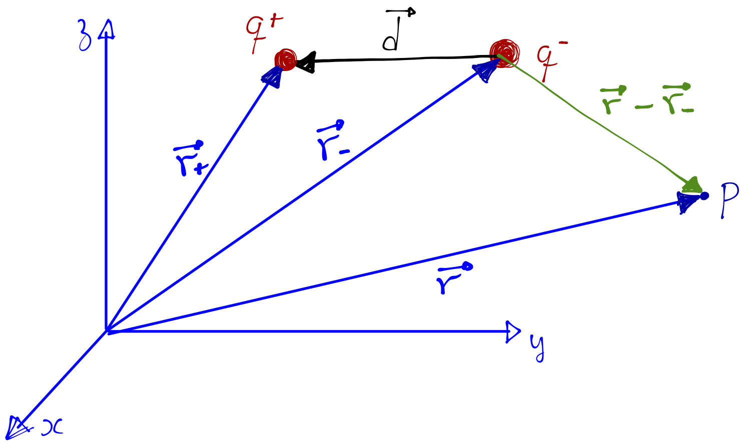
"Obs: o sinal aproximado em $\vec{T}_{CG} \approx \vec{P} \times \vec{E}$ deve-se ao fato de estarmos considerando um campo elétrico não uniforme, enquanto que $\vec{T}_{CG} = \vec{P} \times \vec{E}$ foi obtido para um campo uniforme. Este resultado de aproximação é tão mais válido quanto menor for a dimensão do dipolo relativamente às fontes de campo elétrico, pois desta forma o campo não muda significativamente entre as cargas que compõem o dipolo elétrico."

## Obtenção do campo elétrico gerado por um dipolo elétrico através do potencial elétrico

Acima, obtemos o campo elétrico de um dipolo elétrico diretamente das equações do campo para cada carga;

$$\vec{E} = k_e q \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_-)}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right].$$

Claramente, o procedimento de se expandir a função vetorial se mostrou dispendioso. Vamos agora tentar obter o campo elétrico de um dipolo através do potencial elétrico gerado pelas cargas que o compõem. Vamos recorrer à mesma geometria ilustrada antes:




Obtenção do potencial $V(\vec{r})$.

$$V(\vec{r}) = k_e q \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} \right].$$

Como $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_- \Rightarrow \vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{d}$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = k_e q \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} \right]$$

Vamos expandir o primeiro termo $|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^{-1}$, pois neste termo está a variável infinitamente pequena (ou relativamente pequena) $\underline{d}$.

$\Rightarrow$ Fazendo $\vec{a} = \vec{r}^{+} - \vec{r}^{-}$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{d}|^{-1} = \left[(\vec{a} - \vec{d}) \cdot (\vec{a} - \vec{d})\right]^{-1/2} = \left(a^2 - 2\vec{a}.\vec{d} + d^2\right)^{-1/2} = a^{-1}\left(1 - \frac{2\vec{a}.\vec{d}}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$

Façamos $x = -\frac{2\vec{a}.\vec{d}}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}$ ; a parte entre parênteses fica

$f(x) = (1+x)^m$ com $m = -1/2$

Expandindo $f(x)$:

$$f(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{(m-1)} \Rightarrow f'(0) = m \qquad \text{Mas } f(x) \approx f(0) + f'(0).x$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$\Rightarrow f(x) \cong 1 + mx = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\vec{a}.\vec{d}}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}\right)$$

Voltando:

$$|\vec{a} - \vec{d}|^{-1} \cong a^{-1}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{-2\vec{a}.\vec{d}}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}\right)\right] \approx a^{-1}\left(1 + \frac{\cancel{2}\vec{a}.\vec{d}}{\cancel{2}\, a^2}\right)$$

"desprezando o termo com $d^2$"

Voltando na original:

$$V(\vec{r}) = K_e q \left[\frac{1}{|\vec{a} - \vec{d}|^{2}} - \frac{1}{a}\right]$$

$$\cong K_e q \left[\cancel{a^{-1}} + \frac{\vec{a}.\vec{d}}{a^3} - \cancel{a^{-1}}\right]$$

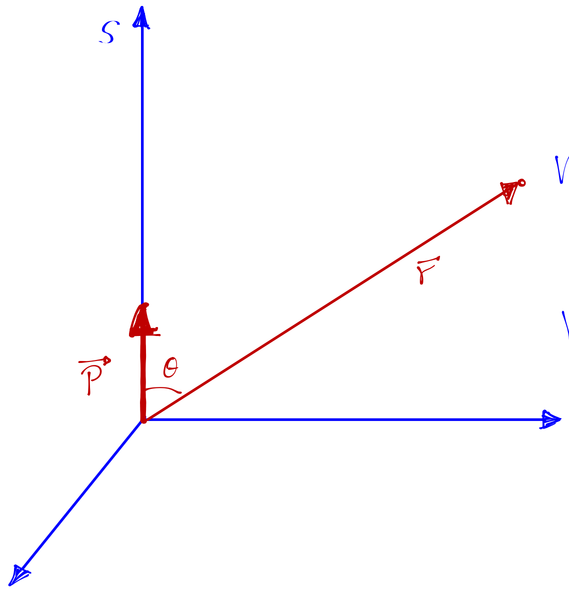
$$V(\vec{r}) \approx K_e q . \frac{(\vec{r}^{+} - \vec{r}^{-}).\vec{d}}{|\vec{r}^{+} - \vec{r}^{-}|^3}.$$

Posicionando $\vec{r}^{-} = \vec{0}$, temos

$$V(r) = K_e \frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3}}$$

**Problema:** Obter $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ a partir de $\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} V$

Vamos estabelecer uma geometria favorável:




$$V(r) = k_e \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{k_e P r \cos(\theta)}{r^3}$$

$$V(r) = \frac{k_e P \cos(\theta)}{r^2}$$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} V(r)$ Vamos utilizar $\vec{\nabla}$ em coordenadas esféricas.

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \cancel{\hat{\varphi}\frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

Não depende de $\varphi$.

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = -\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}(V) - \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -k_e P \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} r^{-2}\,\hat{r} - \frac{k_e P}{r^3}\frac{\partial}{\partial \theta}\cos(\theta)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{2k_e P \cos(\theta)}{r^3}\,\hat{r} + \frac{k_e P\,\text{sen}(\theta)}{r^3}\,\hat{\theta}$$

ou $$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos(\theta)\,\hat{r} + \text{sen}(\theta)\,\hat{\theta}\right)}$$ .

Para efeito de comparação vamos obter $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$ em componentes $\hat{y}$ e $\hat{k}$.

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\left(k_e \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\left(k_e \frac{P_i r_i}{r^3}\right)$$

"Entenda $P_i r_i$ a soma $P_1 r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3$".

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial r_j}\left(k_e \frac{P_i r_i}{r^3}\right)\hat{r}_j$$

"$\hat{r}_j$ = unitários $\hat{r}_1$, $\hat{r}_2$ ou $\hat{r}_3$, popularmente denotados por $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$".

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_i r_i}{r^3}\right)\hat{r}_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_i r_i}{r^3}\right)\hat{r}_j = P_i\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial r_i}{\partial r_j} + r_i\frac{\partial}{\partial r_j}(r^{-3})\right)\hat{r}_j$$

Desde que estejamos utilizando um sistema ortogonal:

$\dfrac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$, pois é $\underline{1}$ se $i = j$ e $\underline{0}$ se $i \neq j$.

Análise do termo $r_i \dfrac{\partial}{\partial r_j}\left(r^{-3}\right)\hat{r}_j$.

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(r^{-3}\right)\hat{r}_j$$

$r_j$ = componente de $\underline{r}$ no sentido $\hat{j}$.
Exemplo: $r_j$ pode ser $x$, $y$ ou $z$ no sistema retangular.

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

Para $r_j = x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-3}\right) = -\frac{3}{2}\left(r^2\right)^{-5/2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-3}\right) = -\frac{3}{r^5}x$$

Portanto: $\frac{\partial}{\partial r_j}(r^{-3}) = \frac{-3r_j}{r^5}$ $\qquad r_i\frac{\partial}{\partial r_j}(r^{-3}) = \frac{-3r_ir_j}{r^5}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_ir_i}{r^3}\right)\hat{r}_j = P_i\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3r_ir_j}{r^5}\right)\hat{r}_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_ir_i}{r^3}\right)\hat{r}_j = \left(\frac{P_i}{r^3}\delta_{ij} - 3\frac{P_ir_ir_j}{r^5}\right)\hat{r}_j$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_ir_i}{r^3}\right)\hat{r}_j = \left(\frac{P_i\delta_{ij}\hat{r}_j}{r^3} - 3\frac{P_ir_ir_j\hat{r}_j}{r^5}\right)$$

$\Rightarrow$ $P_i\delta_{ij}\hat{r}_j$ representa uma soma sobre todos os valores possíveis de $i$ e $j$, incluindo o versor $\hat{r}_j$"

$$\Rightarrow P_i\delta_{ij}\hat{x}_j = P_1\delta_{11}\hat{x}_1 + \cancel{P_2\delta_{21}\hat{x}_1} + \cancel{P_3\delta_{31}\hat{x}_1} + \cancel{P_1\delta_{12}\hat{x}_2} + P_2\delta_{22}\hat{x}_2 + \cancel{P_3\delta_{32}\hat{x}_2}$$

$$+\cancel{P_1\delta_{13}\hat{x}_3} + \cancel{P_2\delta_{23}\hat{x}_3} + P_3\delta_{33}\hat{x}_3 = P_1\hat{x}_1 + P_2\hat{x}_2 + P_3\hat{x}_3 = \vec{P}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_ir_i}{r^3}\right)\hat{r}_j = \frac{\vec{P}}{r^3} - 3\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^5}\underline{r_j\hat{r}_j}$$

$\Rightarrow$ aplicando a convenção da soma, $r_1\hat{\imath} + r_2\hat{\jmath} + r_3\hat{k} = \vec{r}$

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{P_ir_i}{r^3}\right)\hat{\jmath} = \frac{\vec{P}}{r^3} - \frac{3\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

Voltando:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{P}}{r^3} - \frac{3\vec{P}\cdot\vec{r}\,\hat{r}}{r^4}\right)$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^4}\hat{r} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right)}$$

, como havíamos obtido antes, quando fixamos $\vec{P}$ no sentido do eixo $\underline{z}$; $\vec{P} = P\hat{k}$.

**Como exercício:** Calcular: (a) $\vec{E}(\vec{r})$ paralelamente ao eixo do momento de dipolo $\vec{P}$.

(b) Perpendicularmente ao eixo $\vec{P}$.

**Problema resolvido** Calcular o trabalho realizado por uma força externa para deslocar uma carga $\underline{Q}$ ao longo de um vetor $\vec{l}$.

Solução: Primeiro deve-se ter em mente que a energia "gasta" por um agente externo é transferida para o sistema:

Exemplo: Alguém comprime uma mola: $\Rightarrow$ O indivíduo perde energia enquanto a mola ganha.

Em outras palavras, se o agente externo realiza um trabalho positivo $(W_{ext} > 0)$, então o externo perde energia igual ao trabalho que realizou, enquanto que o sistema manipulado tem sua energia aumentada, e vice-versa.

Portanto: $\Delta U$ de um sistema $= W_{ext}$, ou então

$\Delta U = -W_{int}$.

" $W_{ext}$ = trabalho calculado com a força externa "

$W_{int}$ = " " " " " interna".

$$U(\vec{r}) = Q\,V(\vec{r})$$

Vimos que $\underset{\text{dipolo}}{V(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}\cdot\vec{P}}{r^3}$

$$\Rightarrow U(\vec{r}) = \frac{Q\,\vec{r}\cdot\vec{P}}{4\pi\epsilon_0\, r^3}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta U(\vec{r}) = \frac{Q\,\vec{P}\cdot\vec{r}_f}{4\pi\epsilon_0\, r_f^3} - \frac{Q\,\vec{P}\cdot\vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0\, r_i^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{P}\cdot\left(\frac{\vec{r}_f}{r_f^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)}$$

Note que trata-se de $\Delta U = Q\left(V(\vec{r}+\vec{l}) - V(\vec{r})\right)$

Podemos considerar $\vec{l}$ muito pequeno, obter $\Delta U$ para este $\vec{l}$ pequeno tal que $\Delta U \longrightarrow dU$. Então, calcular $\Delta U$ através de uma soma dos pequenos $dU$, ou seja:

$$\Delta U = \int_{r_i}^{r_f} dU$$

Procedendo:

$$V(\vec{r}+\vec{l}) = V(\vec{r}) + \underbrace{\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial l}}\, l \qquad \text{"pala } l \ll r\text{."}$$

Taxa de variação de $V(\vec{r})$ ao longo de $\vec{l}$.

Mas $\vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{l} = \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial l}\, l$ = "Componente da taxa de variação de $V(\vec{r})$ no sentido de $\vec{l}$ (produto escalar $\vec{\nabla} V \cdot \hat{u}_l$) multiplicada pelo tamanho do deslocamento"

$$V(\vec{r}+\vec{l}) = V(\vec{r}) + \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{l}$$

Voltando:

$$\Delta U = Q\left(V(\vec{r}+\vec{l}) - V(\vec{r})\right)$$ ; para $l \ll r$, digamos infinitesimal $d\vec{l}$

$$dU = Q\left[V(\vec{r}) + \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - V(\vec{r})\right]$$

$$dU = Q\,\vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U = \int dU = Q \int \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Como $W_{ext} = \Delta U_{\text{do sistema}}$ ;

$$W_{ext} = Q \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Análise: Note que $\Delta V(\vec{r}) = -\vec{\mathcal{E}}$

$\Rightarrow W_{ext} = -Q\int \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}$

$\Rightarrow$ Deslocamentos $d\vec{l}$ perpendiculares à $\vec{\mathcal{E}}$ não exigem trabalho externo e não alteram a energia do sistema".

Adicionalmente, deslocamentos $d\vec{l}$ em mesmo sentido do campo $\vec{\mathcal{E}}$ diminuem a energia do sistema $\left(\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} > 0\right)$ pois, como vimos $\Delta U = W_{ext}$.

Obs: Este resultado não é exclusivo para o dipolo, mas serve para qualquer potencial elétrico, afinal $\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}V$ é geral.

**Problema resolvido** Qual o trabalho realizado para posicionar um dipolo elétrico em um campo elétrico de origem externa?

Solução: Vamos considerar um potencial $V_{ext}(\vec{r})$. Posicionar um dipolo em um ponto $\vec{r}$ significa, por exemplo, posicionar $-q$ no ponto $\vec{r}$ e $+q$ no ponto $\vec{r}+\vec{l}$. Então a energia potencial é a soma

$$\Delta U(\vec{r}) = qV(\vec{r}+\vec{l}) - qV(\vec{r})$$ "trazendo $\vec{p}$ do infinito".

$$\Delta U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) + q\vec{\nabla}V(\vec{r})\cdot\vec{l} - qV(\vec{r})$$

$$\Delta U = q\vec{l}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

$$\Delta U = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

Como $W_{ext} = \Delta U$

$$\boxed{\Rightarrow W_{ext} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})}$$

"Fica como exercício conceitual realizar uma análise sobre esta expressão; Trazer o dipolo com $\vec{p}$ paralelo ou antiparalelo à $\vec{\nabla}V$; perpendicular à $\vec{\nabla}V$" etc..."