Unidade eletrostática / por Maxwell

Medindo a força eletrostática:

Neste ponto vamos utilizar experimentos eletrostáticos. Tais experimentos foram realizados preferencialmente utilizando-se a balança de torção elaborada por Michell para determinação da força gravitacional entre pequenos corpos. Coulomb elaborou de forma independente, um aparato similar e o aplicou, com sucesso, para determinar as leis de força para as interações eletrica e magnética. Este tipo de balança é sempre utilizada quando pequenas forças precisam ser medidas.

Vamos considerar, arbitrariamente, as unidades de carga elétrica como e e e'. Vamos considerar o corpo A carregado com m unidades de carga positiva e n unidades de cargas negativas, que pode ser pensado como se fossem introduzidas separadamente dentro do corpo.

Deixemos um segundo corpo, B, ser carregado com m' cargas positivas e n' unidades de carga negativa.

Então cada carga positiva em A vai repelir cada uma da carga positiva em B com um certa força f, resultando em um efeito total

$$F_{(++)} = m.m' f$$

Ex: 2 positivas em cada

$\Rightarrow F = 2.2.f = 4f$

Significa que cada uma em um dos corpos repele as duas do outro com uma força f. resultando em $4f$.

Lembrar que m e m' correspondem à cargas positivas enquanto que n e n' são negativas.

$\Longrightarrow$ As cargas negativas n e n' também se repelem mutuamente resultando em

$$F_{(--)} = n.n' f$$

Enquanto que a força de atração é dada por:

$$F_{(+-)} = m m' f \qquad \text{e} \qquad F_{(-+)} = m . m' f$$

A repulsão total será $F_{repul} = (m.m' + m.m').f$

A atração total será $F_{atrac} = (mm' + mm').f$

⇒ A força líquida final é

$$F_{total} = (mm' + mm' - mm' - mm').f$$

ou $$F_{total} = \underbrace{(m - m)}_{\text{Carga líquida em A}} . \underbrace{(m' - m')}_{\text{Carga líquida em B}} . f$$

f → módulo da força entre duas unidades de carga.

Façamos $(m - m) \equiv q$ e $(m' - m') = q'$; os valores numéricos das cargas elétricas em $\underline{A}$ e $\underline{B}$, respectivamente.

$$\Rightarrow \boxed{F_{total} = q . q' . f}$$

Note que neste procedimento nada foi definido; Apenas consideramos que duas unidades de carga elétrica se repelem/atraem com alguma força. Assim, no futuro quando a unidade for definida (número + nome) f pode ser usada para retratar F corretamente.

Variação da Força com a distância.

Acima avaliamos a força elétrica a uma distância fixa.
Consideramos, arbitrariamente, que dois corpos pontuais $\underline{A}$ e $\underline{B}$ estando a uma distância fixa $\underline{d}$. Assim, a força entre duas unidades de carga possui um valor fixo f.

Experimentos mostram que as forças variam inversamente com o inverso do quadrado da distância.

↓

Então se f for a força entre duas unidades de cargas distantes em uma unidade de comprimento, então a força entre duas unidades de carga a uma distância r qualquer será:

$$f \cdot r^{-2}$$

Prova:

$$e \overset{r_1}{\longmapsto} e' \Rightarrow f(r_1) = f_1$$

$$e \overset{r_2}{\longmapsto} e' \Rightarrow f(r_2) = f_2$$

Mas $\quad f_1 \propto \frac{1}{r_1^2} \qquad f_2 \propto \frac{1}{r_2^2} \qquad \frac{f_1}{r_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

$$f_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot f_1$$

Então se $r_1 =$ uma unidade onde a força é $f_1 = f$

$\Rightarrow$ a uma distância $r = r_2 \Rightarrow f_2 = f \cdot r^{-2}$

Portanto, a força total a uma distância r qualquer, se f a força entre unidades de carga a uma unidade de distanciamento, é:

$$F = \frac{q \cdot q' \cdot f}{r^2}$$

Obs.: Neste caso f foi definido como sendo a força entre duas unidades de carga eletrostáticas distanciadas de uma unidade de comprimento

— 11 —

Nota: A equação acima representa a lei de variação da força com a distância r e não o valor numérico da força; afinal, ainda não foram definidas as unidades envolvidas. Não definimos o valor de f (Força em uma unidade de comprimento). Nem mesmo definimos qual unidade de comprimento utilizaremos.

Definição da unidade eletrostática de eletricidade.

Podemos agora definir a unidade eletrostática com base no valor da força f. Dentre as infinitas possibilidades escolheu-se (Gauss - 1832) $f = 1$; em outras palavras:

A unidade eletrostática de eletricidade é a quantidade de eletricidade que quando quando distanciada de outra unidade, produz uma unidade de força eletrostática. Ou inversamente, mais apropriado pois mede-se $\underline{F}$ e $\underline{r}$ e não $\underline{q}$ $\leftrightarrow$ Quando cargas idênticas distanciadas em uma unidade de comprimento produzirem uma unidade de força, então estamos lidando com unidades de carga eletrostática.

Assim, podemos escrever a lei geral na seguinte forma:

$$F = \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

Dimensões da unidade eletrostática.

$$F \; [F] = \frac{q \cdot q'}{r^2} \quad [q^2] . [L^{-2}]$$

Obs: Colchetes representam unidades de medidas daquilo que está delimitado.

$[F]$ = unidade de medida de força.

Etc...

$$\Rightarrow [q^2] = [F] . [L^2]$$

$$\Rightarrow [q] = [F^{1/2} . L]$$

Mas $[F] = \left[M . \frac{L}{T^2} \right]$

M = massa
L = Comprimento
T = tempo.

$$\Rightarrow [q] = \left[M^{1/2} . \frac{L^{1/2}}{T} . L \right]$$

$$[q] = \left[\frac{M^{1/2} \cdot L^{3/2}}{T}\right] ;$$ Esta é a unidade de carga eletrostática no sistema fundamental.

— " —

No sistema eletrostático em unidades absolutas, portanto, a relação entre cargas estáticas é estudado primeiro. Significa que os demais desenvolvimentos neste sistema devem concordar com as intensidades relacionadas com as unidades acima definidas.

Pergunta: Uma vez que a unidade de carga eletrostática está definida - qual seria a unidade de corrente elétrica, ou mesmo o que seria corrente elétrica?

Esta questão é bem menos óbvia do que pode parecer: Um estudande em nível inicial tende a responder imediatamente ⇒

Unidade de corrente = Uma unidade de carga eletrostática por unidade de tempo

Corrente = Quantidade de unidades eletrostáticas que passa por um condutor a cada unidade de tempo.

Porém, assim como utilizou-se um experimento eletrostático para definir-se a unidade eletrostatica de carga, qual seria o experimento a ser realizado capaz de verificar o número de cargas eletrostáticas que passa por unidade de tempo através de um condutor?

Um experimento para corrente elétrica baseado na carga eletrostática (cargas estáticas) simplesmente não é possível - pelo menos com a tecnolia que temos até o momento (2014).

Vamos tentar alguns experimentos mentais - Lembrando que em nosso sistema está definido que uma unidade de carga eletrostática é:

$$[e] = [N^{1/2} \cdot L] = \left[\frac{M^{1/2} \cdot L^{1/2}}{T} \cdot L\right] = \left[\frac{M^{1/2} \cdot L^{3/2}}{T}\right]$$

ou $1e = 1 . \dfrac{(\text{Massa})^{1/2} . (\text{comprimento})^{3/2}}{\text{tempo}}$

Então como seria possível detectar uma quantidade múltipla destas grandezas passando por um fio ?

Podemos medir correntes do tipo: (i) Quantidade de pessoas passando em uma porta por unidade de tempo, pois temos tetectores capazes de sentir cada pessoa passando (visão, som, etc) (ii) Quantidade de massa de água passando por uma torneira - basta deixar a água cair em um balde, medir o tempo e depois verificar a quantidade de massa armazenada no balde.
(iii) etc...

Note que em todos os casos onde é possível determinar-se uma certa quantidade por um certo tempo ⟹ Existe uma forma de detecção das quantidades - ou seja - é possível "enxergar-se" direta ou indiretamente a quantidade de vezes que a unidade passou pelo "condutor".

Você consegue imaginar alguma forma de se "enxergar" (mesmo indiretamente) um múltiplo de $1 \dfrac{(\text{Massa})^{1/2} . (\text{compr.})^{3/2}}{\text{tempo}}$?

Ou equivalentemente $1 \ (\text{Força})^{1/2} . (\text{distância})$?

Múltipo de $1 \ (\text{Força})^{1/2} . (\text{distância})$ é possível para cargas estáticas ⟶ basta aproximar uma quantidade de carga estática que se quer determinar de uma quantidade conhecida - medir a força e a distância e comparar com a definição de unidade eletrostática.

Poderíamos definir corrente de forma independente à definição de carga ?

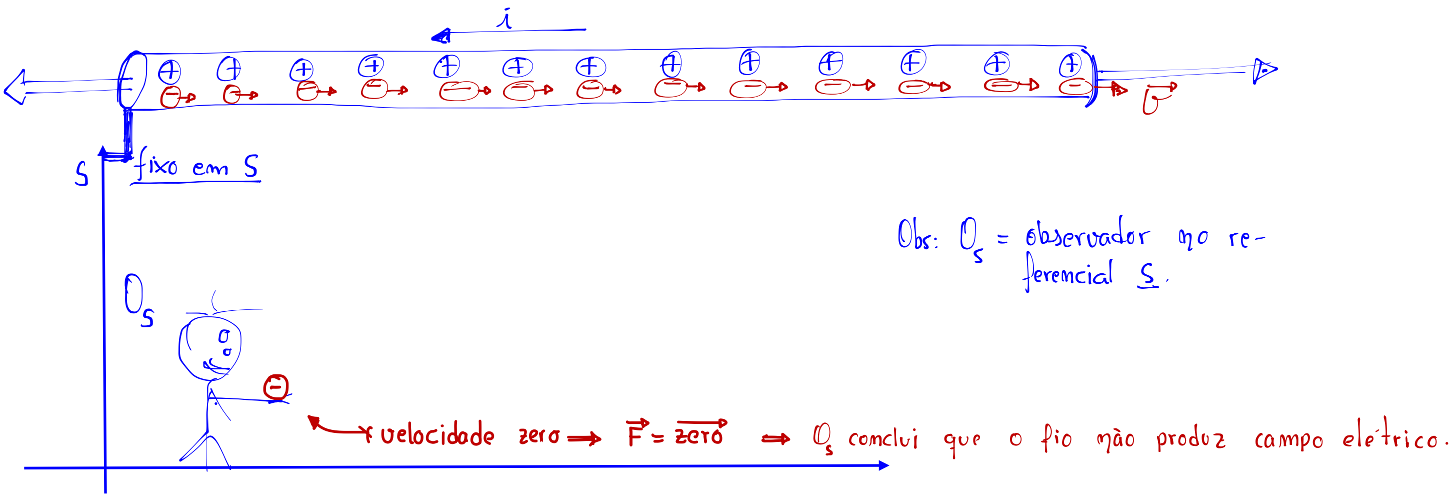
Em princípio sim mas, como sabemos que corrente elétrica se dá por cargas elétricas em movimento e já temos definição da unidade eletrostática então definir corrente elétrica de forma independente seria o mesmo que definir-se outra unidade de carga, e não parece coerente que uma mesma grandeza física seja representada por duas unidades diferentes.

Como então poderíamos medir a ação de uma corrente elétrica utilizando a unidade eletrostática previamente definida?

A resposta está em sermos capazes de prever qual seria o efeito de uma certa quantidade de carga eletrostática em movimento sobre algum detector da ação (força).

De fato, hoje sabe-se que os campos de ação de cargas eletrostáticas e de cargas em movimento (campo elétrico e campo magnético, respectivamente), na verdade não são grandezas físicas diferentes – o que ocorre é que percebemos como campo elétrico ou campo magnético dependendo do referencial que se está relativamente às cargas observadas.

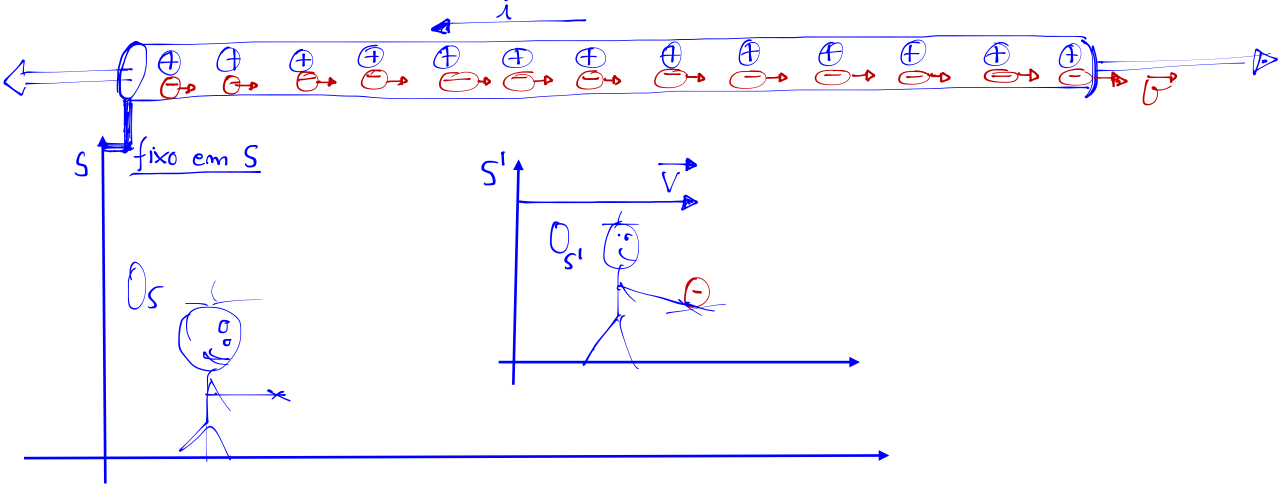
Algo do tipo: Considere um fio condutor com corrente, e em repouso relativamente a um referencial S (laboratório), como abaixo:



Obs: O_s = observador no referencial S.

Obs: hoje sabe-se que as cargas negativas (elétrons) é que se movimentam contudo a corrente é definida no sentido de um aparente fluxo de cargas positivas.

Observando fios condutores atravessados por correntes i em um "laboratório", os fios ficam eletricamente neutros pois cargas em repouso nas proximidades de fios com corrente elétrica não são atraídas ou repelidas pelo fio. Por outro lado, cargas em movimento (outros fios com correntes) são atraídas ou repelidas para o fio, como ilustrado abaixo.



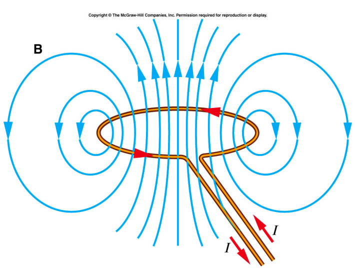
Do ponto de vista de O_s a carga ($\ominus \longrightarrow \vec{V}$) possui velocidade $\vec{V}$ relativa ao fio com corrente fixo em seu referencial. Invariavelmente, nesta condição O_s observa uma força do tipo

$\vec{F} \propto q\vec{v} \times \vec{B}$, onde q = Carga elétrica da partícula em movimento

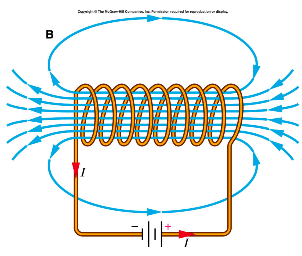
$\vec{v}$ = velocidade da partícula

$\vec{B}$ = Alguma coisa produzida pela corrente i no fio afinal, a força deixa de existir se $i = 0$.

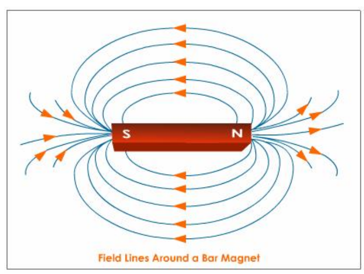
Como esta força não parece ter origem elétrica, O_s a considera uma nova forma de força. Adicionalmente, experimentos com correntes através de condutores enrolados (solenóides) evidenciam um padrão para o campo $\vec{B}$ similar ao observado em imãs naturais



Linhas de Campo magnético nas vizinhanças de uma espira com corrente.



Linhas de Campo magnético nas vizinhanças de um solenoide.



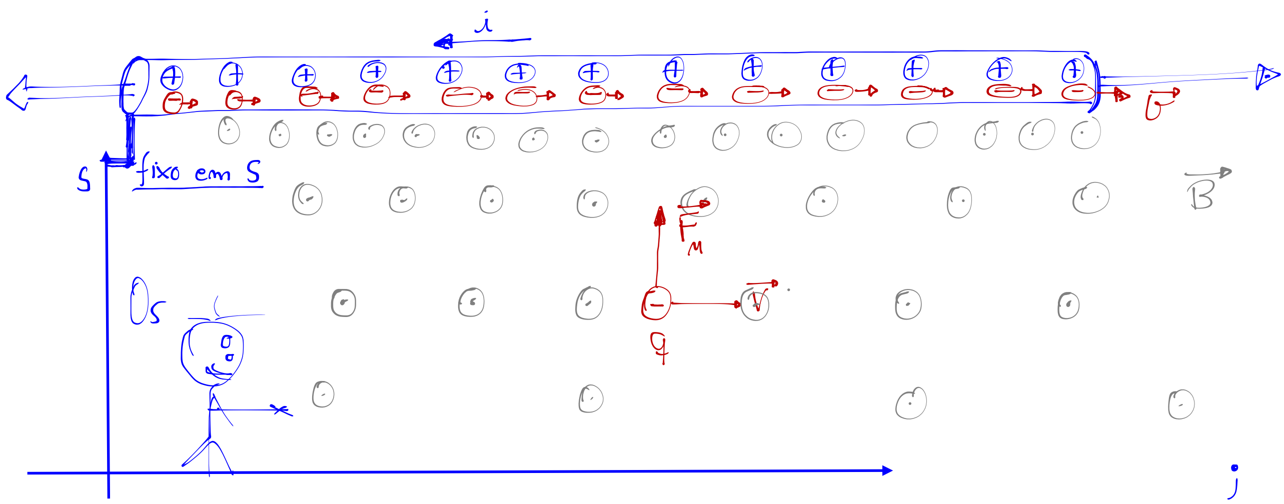
Linhas de campo magnético de um imã natural – Similar às linhas de um solenóid.

Seguindo esta similaridade O_s considera que a força sobre a carga em movimento possui origem magnética:

$\vec{F}_M = \underline{Cte}\, q\vec{v}\times\vec{B}$

"$\underline{Cte}$ = constante de proporcionalidade, dependente de como q e $\vec{B}$ são definidos (do sistema de unidades utilizado).

No exemplo acima a corrente produz campo magnético saindo da página e O_s observa uma força magnética sobre q, como segue:



Para O_s $\Rightarrow$ $\vec{F}_M = \underline{cte}\; q\vec{v}\times\vec{B}$.

Por outro lado, do ponto de vista do observador $O_{s'}$, relativo ao qual a carga $\underline{q}$ está em repouso, forças sobre a carga $\underline{q}$ não são do tipo $\vec{F}\propto q\vec{v}\times\vec{B}$, visto que neste referencial $\vec{v}=\vec{0}$.

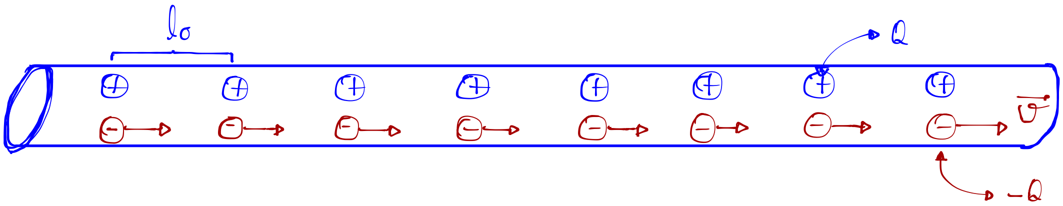
Mas se O_s enxerga a carga $\underline{q}$ sendo atraída para o fio $\longrightarrow$ $O_{s'}$ necessariamente tem que enxergar a mesma coisa - afinal, o que acontece $\longrightarrow$ acontece para todos os observadores inerciais sob as mesmas leis físicas.

Conclui-se então que $O_{s'}$ detecta uma força com mesmo sentido e intensidade que O_s observa.

Mas que força seria esta?

De fato a resposta para esta questão veio por meio da teoria da relatividade especial de Albert Einstein em ~1905. Basicamente utiliza-se a chamada <u>contração relativista</u> (ou contração de Lorentz), como segue:

Consideremos o ponto de vista do observador $O_{S'}$ junto com a carga q. Consideremos também que o fio de corrente, em repouso com relação à $\underline{S}$, possui um espaçamento médio $\underline{l_0}$ entre suas cargas



Assim a densidade de cargas em $\underline{S}$ é

$$\lambda_0^+ = \frac{Q}{l_0} \qquad e \qquad \lambda_0^- = -\frac{Q}{l_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_{resultante} = \lambda_0^+ + \lambda_0^- = zero$$

$\Longrightarrow$ Não há carga elétrica resultante do ponto de vista de $\underline{O_S}$;

$\Longrightarrow$ $\vec{E} = \vec{zero}$

$\Longrightarrow$ $\vec{F}_e = \vec{zero}$

Vamos agora passar para o referencial $\underline{S'}$.

Vamos, por simplicidade, considerar um caso particular com a velocidade da carga de prova $\underline{q}$ sendo igual à velocidade das cargas $\underline{Q}$ no fio de corrente.

Qualitativamente: A medida que q adquire velocidade no sentido das cargas $\underline{Q}$ em movimento no fio, a distância entre as cargas Q $(\underbrace{\oplus \quad \oplus}_{l_0})$ diminui devido a contração de Lorentz, tal que:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Isto produz um acréscimo na densidade de cargas positivas enxergadas por $O_{S'}$;

$$\lambda^{+} = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{l_0} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (*)$$

Se considerarmos o caso comum onde $v \ll c$, podemos recorrer a uma aproximação linear expandindo em série de Taylor até 1ª ordem como segue:

Simplificando: Vamos definir $X = -v^2/c^2$

$$\Rightarrow f(x) \equiv (1 + X)^{-1/2}$$

Expansão em série de Taylor em torno de $X = 0$:

$$f(x) = f(x)\Big|_{X=0} + f'(x)\Big|_{X=0} \cdot X + \frac{1}{2!} f''(x)\Big|_{X=0} \cdot X^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)\Big|_{X=0} \cdot X^3 + \ldots$$

Em nosso caso:

$$f(x) \simeq f(x)\Big|_{X=0} + f'(x)\Big|_{X=0} \cdot X$$ será suficiente.

$$f(x) = (1 + X)^{1/2} \Rightarrow f(x)\Big|_{X=0} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1 + X)^{-3/2} \Rightarrow f'(x)\Big|_{X=0} = -\frac{1}{2}$$

Então:

$$(1 + X)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \cdot X$$; inserindo $X = -\frac{v^2}{c^2}$

$$(1 + X)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Voltando na equação acima par λ^+.

$$\Rightarrow \lambda^+ \simeq \frac{Q}{l_0} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \quad ; \text{ com } \frac{Q}{l_0} = \lambda_0 .$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda^+ = \lambda_0 + \frac{\lambda_0 v^2}{2c^2}} .$$

$+\frac{\lambda_0 v^2}{2c^2}$ corresponde ao acréscimo na densidade de cargas Q (positivas), percebido por $O_{S'}$.

Repetindo o processo para as cargas $\underline{-Q}$, chega-se a

$$\lambda^- = -\frac{Q}{l} = -\frac{Q}{l_0 / \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = -\lambda_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow$ Aproximando em Taylor 1ª ordem $\rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2}$

Desta forma $O_{S'}$ percebe um fio com densidade resultante

$$\lambda_{res} = \lambda^+ + \lambda^- = \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_0 v^2}{2c^2}\right) + \left(-\lambda_0 + \frac{\lambda_0 v^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{\lambda_{res} = \frac{\lambda_0 v^2}{c^2}}$$

; $O_{S'}$ enxerga $\lambda^+ > \lambda^-$. Isso explica ao observador $O_{S'}$ a origem da força sobre q. Para ele é uma <u>força elétrica</u> devida à carga elétrica Orquida sobre o fio condutor

Observe que o sentido desta força coincide com a magnética observada de <u>S.</u>

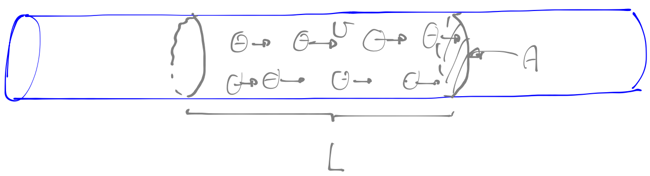
Vamos agora comparar as intensidades das forças $\vec{F}_M$ em S e $\vec{F}_e'$ em S'.

Vamos utilizar a equações definidas no sistema de unidades internacional (SI).

$\rightarrow \vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$, onde $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$.

$\rightarrow |\vec{F}_M| = \dfrac{q.v.\mu_0 i}{2\pi r}$.

Vamos colocar $\underline{i}$ como função da velocidade $\underline{v}$ das cargas no fio.



$$i = \frac{[\text{Carga total dentro do volume A.L } (\text{V}^{o})]}{(\text{tempo que levam para atravessarem a área transversal } \underline{A} \ (t))}$$

$\rightarrow$ Carga em $\underline{A.L}$ $=$ $\lambda_0 . L$ $\rightarrow$ densidade linear de cargas

e $t =$ tempo para que a carga na extremidade esquerda dentro do volume chegue até a outra extremidade, ou seja:

$$t = \frac{L}{v}$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{\lambda_0 \cancel{L}}{\cancel{L}} . v$$

$$\boxed{i = \lambda_0 v}$$

$$\Rightarrow \quad F_M = \frac{q v \mu_0}{2\pi r} . \lambda_0 v$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_M = \frac{q.\mu_0.\lambda_0.v^2}{2\pi r}\,\hat{j}}$$

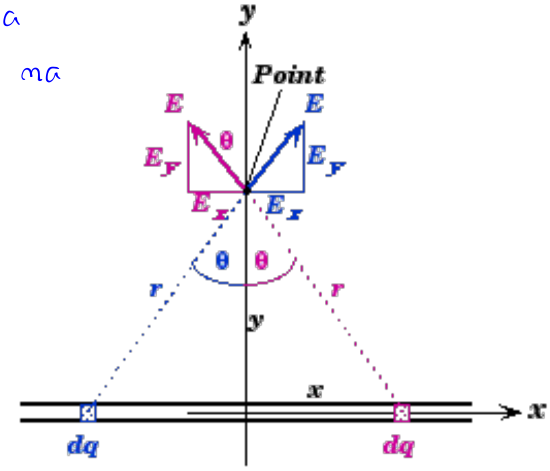
"lembre que consideramos $V = v$".

v = velocidade das cargas do fio condutor

V = velocidade da carga q próxima ao fio.

★ Cálculo da força elétrica percebida em $\underline{S'}$.

O campo elétrico a uma distância $\underline{r}$ de um fio infinito é, baseando-se na ilustração ao lado:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{j}$$

Mas vimos acima que em S' é percebida uma densidade

$$\lambda = \frac{\lambda_0 v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e' = q.\vec{E}$$

$$\vec{F}_e' = \frac{q.\lambda_0 v^2}{2\pi\varepsilon_0 r c^2}\,\hat{j}$$

lembrando que $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

$$\Rightarrow \vec{F}_e' = \frac{q\lambda_0}{2\pi\frac{1}{\mu_0 c^2}.r}\,\frac{v^2}{c^2}\,\hat{j} = \frac{q\lambda_0\mu_0 v^2 \cancel{c^2}}{2\pi r}.\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_e' = \frac{q\lambda_0\mu_0 v^2}{2\pi r}\,\hat{j}}$$

Então $\vec{F}_M = \vec{F}_e\,'$.

Significa: Ser uma força de origem magnética ou elétrica depende do sistema referencial observado.

═══ // ═══

"Nosso objetivo acima foi mostrar que existe uma relação entre cargas estáticas e o efeito produzido por estas cargas quando estão em movimento. Isto significa, entre outras coisas, que a definição de carga elétrica não deve, em um mesmo sistema de unidades, ser definida de forma independente usando a eletrostática

$$\vec{F}_e = \frac{k_e\, q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$ ou a equação dinâmica $$\vec{F}_i = \frac{k_m\, I_1 I_2}{r}\hat{r}\,."$$

Em resumo: Em um dado sistema de unidades padrão, a unidade de carga elétrica deve ser definida em termos de apenas uma entre as duas opções (estática ou dinâmica).