

Obs: A análise acima - relativística, não era conhecida na época de Faraday, Ampère, Maxwell, etc... As equações de Maxwell traduzem observações experimentais no referencial de um laboratório e traduzem a natureza deste ponto de vista. Isto significa que apesar de Maxwell não conhecer os efeitos relativísticos e "achar" que existem dois campos de ação de origens diferentes, suas equações representam corretamente a natureza pois a natureza é o que se observa e os efeitos relativísticos estão implícitos em suas equações.

Equações de Maxwell, ou em outras palavras, equações que resumizam as observações experimentais dos fenômenos elétricos e magnéticos.

Iniciemos através de observações experimentais realizadas no século XVIII / XIX.

1) Interação entre cargas eletrostáticas.

Esta relação já foi apresentada acima e, em unidades eletrostáticas, tem a forma:

→ Força eletrostática.

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \text{ que vetorialmente fica:}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Obs: Vamos manter a notação não vetorial a fim de evitarmos maior grau de abstração para o estudante.

$$\Rightarrow F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Vamos, a partir desta equação, chegar na equação de Maxwell da eletrostática.

Vamos considerar a Força na carga q_2 devido a uma carga $q_1 \equiv q$ e então dividir a força por q_2 a fim de encontrarmos a força por unidade de carga - popularmente conhecida por campo.

$$\Rightarrow \frac{F}{q_2} = \frac{q}{r^2}$$

$$\text{onde } \frac{F}{q_2} \equiv E$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q}{r^2}$$

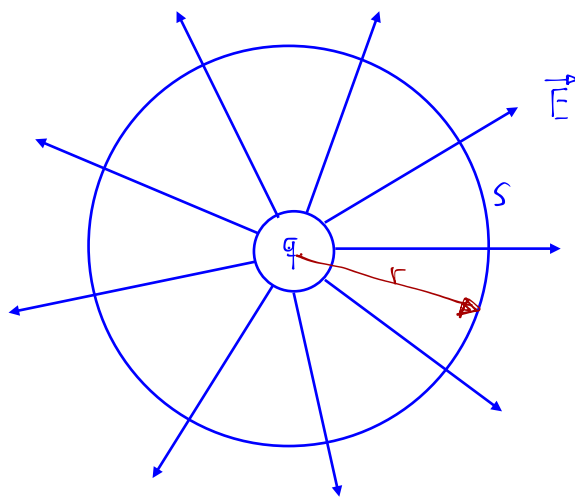
Vetorialmente:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

"sentido radial a partir de q ".

Fluxo:

Como $\vec{E}$ só depende de r , vamos calcular o fluxo de $\vec{E}$ através de uma superfície esférica de raio r em torno da carga q .



O Fluxo de $\vec{E}$ pela superfície S é, em módulo:

Obs: Basta multiplicarmos ambos os lados por $4\pi r^2$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$\underline{\underline{\Phi_E(r) = 4\pi q}}$$

$\Phi_E(r)$ pode ser escrito na forma integral:

$$\Phi_E(r) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q}} \quad (\text{Eq. 1 - Max}) \quad \text{"Equação da eletrostática de Maxwell no sistema de unidades eletrostática de Gauss".}$$

Diz que o fluxo de campo em torno da carga q é proporcional à carga q dentro da superfície.

Obs: Embora tenhamos utilizado uma superfície perfeitamente esférica (por simplicidade), é possível mostrar-se que o resultado acima independe da forma da superfície escolhida, em geral:

$$\underline{\underline{\Phi_E = 4\pi q}}$$

Equação de Fluxo para fontes de campo magnético.

As primeiras observações aconteceram em amostras naturais denominadas, hoje em dia, Magnetitas (China/Grecia antiga).

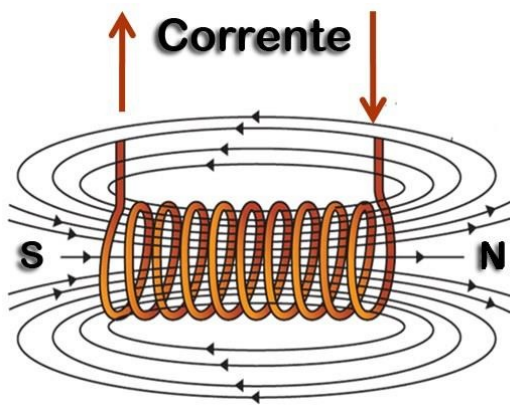
Em 1819 o físico Dinamarquês Oersted observou que pequenos ímãs similares às magnetitas sentiam a ação de correntes elétricas. Em princípio o efeito não era similar às interações observadas na eletrostática.

Adicionalmente, os ímãs naturais sempre apresentavam (apresentam) dois polos um em cada extremidade. Ao se quebrar um ímã natural ao meio - os polos não se separavam, no sentido de que cada pedaço continuava apresentando dois polos magnéticos com sinais opostos.

Perceberam, após inúmeras tentativas (Alguns cientistas tentam ainda hoje [2014] separar um monopolo magnético), que não é possível isolar um polo magnético, tal que um espécime magnético dentro de uma superfície fechada sempre produz Fluxo nulo — o polo positivo produzindo fluxo positivo e o polo negativo produzindo fluxo negativo de mesma intensidade tal que:

$$\oint_{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{sempre.}$$

Após as observações de Oersted notou-se que uma pequena bobina atravessada por uma corrente elétrica se comporta de forma similar aos ímãs naturais, tal que um lado da bobina possui um polo negativo e o outro lado um polo positivo, como representado na Figura abaixo.



Note que onde quer que se situe uma superfície fechada, as linhas de campo magnético entram por um lado e saem pelo outro lado - produzindo fluxo magnético nulo.

Assim: $\Phi_B = 0$ sempre.

Vetorialmente por uma superfície fechada

da qual quer temos:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Eq. 2 - Max}).$$



Fontes de campo magnético

Como comentado acima - campo magnético está associado com a presença de correntes elétricas. Utilizando bússolas ao redor de um fio de corrente - pode-se verificar o sentido e a intensidade do campo magnético produzido por um fio com corrente I (corrente sem unidade definida até este ponto).

A relação de proporcionalidade leva em:

$$|\vec{F}_m| \propto \frac{I_1 I_2}{r} \quad ; \quad \text{onde } I_2 \text{ é um fio de prova (similar à carga de prova.)}$$

Similar à $\vec{E}$, $\vec{B}$ representa força por unidade de "carga magnética". Mas o que é uma carga magnética?

$\Rightarrow$ Carga magnética deve representar aquela grandeza que sofre ação de força ao se submeter ao campo $\vec{B}$ originado de I_1 .

Como só há força sobre o fio 2 quando há corrente no fio 1, podemos então concluir que a carga de prova magnética $\propto q \cdot v$ (linearidade experimentalmente verificada).

tal que $|\vec{F}_m|$ tem a forma $B \cdot \overbrace{q \cdot v}^{\substack{\text{Campo magnético.} \\ \text{Equivale a uma carga magnética}}}$

Aqui q^* representa uma carga que passa pelo fio de prova com velocidade v . Notar que uma q^* não necessariamente corresponde a uma q definida na eletrostática. Isso porque corrente elétrica ainda não foi definida.

De fato, $\frac{q}{q^*} = (\text{fator que representa a proporção da carga eletrostática, relativa à carga que passa por unidade de tempo em unidades de corrente elétrica})$

Exemplo: Definimos que uma unidade de carga é

$$[q] = [F^{1/2} \cdot L]$$

Vamos dar um nome para esta unidade, digamos que:

$$1 [F^{1/2} \cdot L] \equiv 1 \text{ statcoulomb}$$

Então a unidade de carga eletrostática é 1 statcoulomb.

Vamos, de forma independente, realizar um experimento - com uma dada geometria - a fim de definirmos aleatoriamente - uma unidade de corrente elétrica.

Como segue: Quando dois fios paralelos distanciados de uma unidade de comprimento e atravessados por uma mesma corrente elétrica $I_1 = I_2 = 1$, produzir uma unidade de força, chamaremos a corrente utilizada de 1 moscom.

$$\Rightarrow 1 \text{ moscom} = 1 q^* / \text{seg.}$$

Pergunta: Neste experimento, quantos statcoulombs estão passando por segundo pelo fio?

Como foram definidos de forma independentes não necessariamente $1 \text{ moscom} = 1 \text{ statcoulomb} / \text{segundo}$.

Certamente 1 moscom corresponde a uma certa quantidade de carga eletrostática por segundo, mas não 1 statcoulomb .

Digamos que $1 \text{ moscom} \equiv 1 \text{ Pacote} / \text{segundo}$ " $q^* \equiv 1 \text{ Pacote}$ "

Então 1 Pacote corresponde a uma certa quantidade de statcoulombs numa razão

$$\frac{1 \text{ Pacote}}{1 \text{ statcoulomb}} = \text{proporção.} (\equiv K_m) \Rightarrow 1 \text{ Pacote} = K_m \cdot 1 \text{ statcoulomb.}$$

Assim, ao definirmos corrente elétrica temos:

$$I = \frac{N^\circ \text{ Pacotes}}{\text{segundo}} = \frac{N^\circ K_m \cdot 1 \text{ statc}}{\text{segundo}}$$

Portanto $[B] = \left[\frac{\text{Força}}{\text{carga} \cdot \text{veloc}} \right]$; tal que $[F_m] = [B \cdot q^* \cdot v]$

$$\Rightarrow q^* = K_m \cdot q$$

F_m tem a forma $K_m \cdot B q v$

Lembrando que: q = carga elétrica definida no experimento eletrostático.

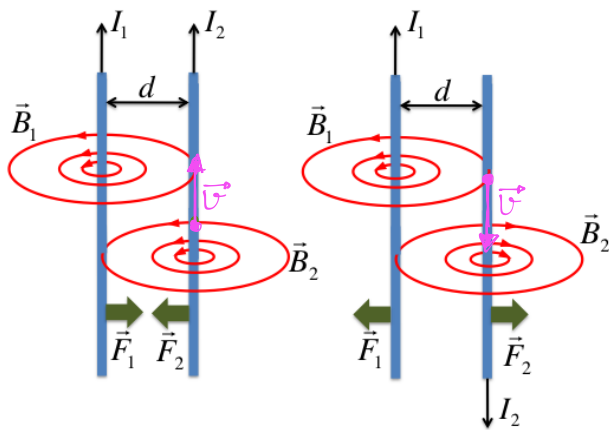
e q^* = carga elétrica definida no experimento dinâmico (corrente).

sendo $K_m \longrightarrow$ constante que representa razão entre as cargas definidas de forma independente - mas / que a certamente tem alguma relação.

Importante.

★ Importante observar que tal como foi definida a dimensão de $[B]$ acima, resulta que K_m é apenas uma razão adimensional. Se, por exemplo, B for definido como no sistema Gaussiano. (CGS); $[B] = \left[\frac{\text{Força}}{\text{carga}} \right]$, então K_m deverá ter dimensão de $[K_m] = \left[\frac{1}{c} \right]$.

Observações experimentais mostram que o sentido de $\vec{F}_m$ é tal que:



$$\Rightarrow \vec{F}_m = k_m \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$$

Força de Lorentz

Em princípio poderíamos definir corrente de forma similar à realizada para a carga eletrostática, algo do tipo:

$$|\vec{F}_m| = \frac{I_1 I_2}{r}$$

Esta definição produziria uma dimensão de carga eletrostática como:

$$[I] = [F^{1/2} \cdot L^{1/2}]$$

Como $I = \text{carga por tempo}$:

$$[q^*] = \left[\frac{F^{1/2} \cdot L^{1/2}}{T} \right]$$

Mas havíamos inicialmente definido $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$

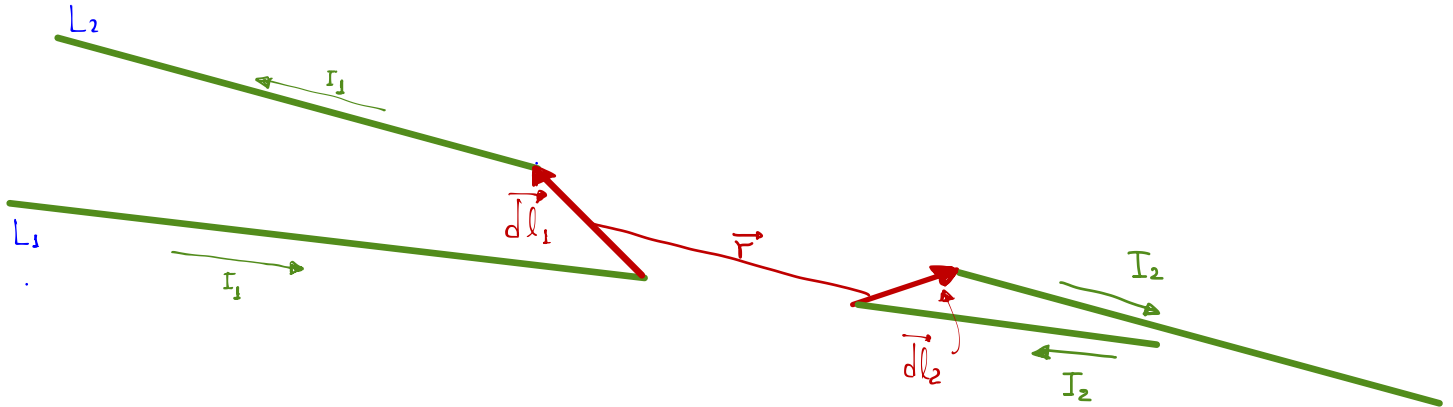
$$\Rightarrow [q] = [F^{1/2} \cdot L]$$

Ou seja, as unidades de um mesmo ente físico seriam diferentes - gerando inconsistência em nosso sistema de medidas.

Vamos então utilizar a relação de Lorentz

$$\vec{F}_m = k_m \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$$

Situando: Lembrar que queremos chegar na versão integral da Equação de Maxwell para o campo magnético gerado por um fio de corrente que passa através de uma seção transversal.



A força entre dois elementos $\vec{dl}_1$ e $\vec{dl}_2$, atravessadas por correntes I_1 e I_2 , respectivamente gera uma força, digamos em $\vec{dl}_2$ devido à $\vec{dl}_1$, que segue a seguinte proporcionalidade experimental.

$$\vec{F}_{21} = \text{cte} \frac{I_1 I_2}{r^2} \vec{dl}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \hat{r}) \quad , \quad \text{Mas qual seria a constante}$$

de proporcionalidade?

$$\text{Rearranjando:} \quad \vec{F}_{21} = I_2 \vec{dl}_2 \times \left(\frac{\text{cte} I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right)$$

$$\vec{F}_{21} = q_2 \cdot \frac{d\vec{l}_2}{dt} \times \left(\frac{\text{cte} \cdot I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right)$$

$$\vec{F}_{21} = q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\text{cte} I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right) \quad , \quad \text{lembrando que } \vec{F}_{21} = k_m q_2 \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \text{cte} \equiv k_m \cdot \text{cte}' \quad ; \quad \vec{F}_{21} = k_m q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\text{cte}' I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\text{cte}' I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{r}}{r^2} \quad a$$

Nesta equação cte' corresponde à razão que leva q^* dentro da corrente I_1 , definida aleatoriamente, em q_e ; portanto $\text{cte}' = k_m$

$$\Rightarrow \underline{\underline{cte = k_u^2}}$$

Portanto: Biot-Savart em unidades eletrostáticas Gaussiana é:

$$\underbrace{d\vec{B}(\vec{r})}_{\downarrow} = k_u \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Para o caso de uma contribuição entre outros $d\vec{l}$'s.

, lembrando que k_u é a razão que relaciona a intensidade da carga eletrostática com a carga que passa por segundo em um fio de corrente, com corrente definida - inicialmente - sem conexão com a carga eletrostática.

— 11 —

Revisão do que vimos até este ponto:

O que estamos estudando?

Estamos construindo as equações de Maxwell a partir de observações experimentais das intensidades das interações eletrostáticas e eletrodinâmicas.

Adicionalmente, estamos detalhando a construção das relações de Maxwell em um sistema específico de unidades, objetivando a compreensão dos fundamentos que regem a construção de um sistema de unidades específico. Estamos definindo nossas "novas" grandezas físicas no sistema eletrostático de unidades (sistema Gaussiano) - o qual é fundamentado, primitivamente, na interação eletrostática em unidades absolutas:

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{tal que } [q] = [F^{1/2} \cdot L] = \left[\frac{M^{1/2} L^{3/2}}{\text{Tempo}} \right].$$

Considerações: Um dos sistemas baseados na equação eletrostática é o Gaussiano (CGS) que usa centímetro (cm), gramas (g) e segundos (s).

Neste caso a Força medida tem dimensão de $[m.a] = [g \cdot \frac{cm}{s^2}]$. Significa que qualquer ex

perimento baseado em força (mesmo que de diferentes origens) deve retornar esta dimensão.

Histórico dos procedimentos:

Carga Eletrostática

Iniciamos definindo carga eletrostática diretamente através da força e da distância:

Força Eletrostática

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

Em seguida, através de experimentos mentais, concluímos que não podemos definir **corrente elétrica** de uma forma aleatória - desacoplada do que foi definido para carga eletrostática.

Campo Eletrostático

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_2} = \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

que representa força por unidade de carga eletrostática.

Fluxo Elétrico por uma superfície fechada.

$$\Phi_E \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Notar: Φ_E tem unidade de carga elétrica

pois, $\vec{E} = \frac{q}{r^2} \hat{r}$

$$[E \cdot r^2] = [q]$$

Fluxo Magnético por uma superfície fechada

Apesar de ainda não termos definido campo magnético - suas unidades - argumentos geométricos e a "não existência" de carga magnética isolada levou naturalmente em:

$$\Phi_B = \text{zero}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \text{zero sempre.}$$

Definição de Campo Magnético e suas unidades

A "percebermos" a ocorrência de um outro tipo de interação diferente - em princípio - da eletrostática, fomos levados a experimentos objetivando representar matematicamente as observações.

De imediato, como o campo magnético é proveniente de um fluxo de cargas elétricas através de um condutor, fomos levados a definir uma unidade para corrente elétrica.

$$\Rightarrow I = \frac{q^*}{\text{tempo}} = k_\mu \frac{q}{\text{tempo}}$$

Sendo q^* definida em um experimento qualquer e k_μ não conhecida que representa quantas cargas eletrostáticas por segundo (tempo) produziram o efeito

experimental utilizado para definir a unidade de corrente.

De qualquer forma, a unidade de corrente é dada em:

$$[I] = \frac{[\text{Cargas eletrostáticas}]}{[\text{tempo}]}$$

$$\text{Usando } q^* \equiv k_m q$$

"Quisemos" que o campo $\underline{B}$ reflectisse a força por unidade de "carga magnética" tal que assumisse a forma $B = \frac{F_m}{q_{\text{mag}}}$.

Contudo, nos experimentos com fios de corrente percebe-se (ver acima) que $q_{\text{mag}} \propto I$ apenas; ou seja, q_{mag} é proporcional à carga que passa pelo fio de prova e pela velocidade com a qual a carga passa pelo fio; afinal:

$$I \propto q/t \quad ; \quad t \propto 1/v \quad \Rightarrow \quad I \propto q \cdot v.$$

Desta forma B foi definido em termos de $q^* \cdot v = q_m$ (q^* definido pelo experimento de corrente; $q^* = k_m q_e$)

$$\Rightarrow B = \frac{F_m}{q_m} = \frac{F_m}{k_m q_e v}$$

$$F_m = k_m q_e v B \sin(\theta)$$

dependência com sentido relativo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$, tal que:

$$\underline{\underline{\vec{F}_m = k_m \cdot q \vec{v} \times \vec{B}}}$$

Força de Lorentz.

Nota: $[\vec{F}_m] = [\vec{F}_e] = [\text{unidade de força}] = \left[\frac{\text{M} \cdot \text{L}}{\text{T}^2} \right]$

$$[v] = \left[\frac{\text{L}}{\text{T}} \right]$$

$$[q] = [\text{esu}] = [\text{unidade eletrostática}] = [F^{1/2} \cdot \text{L}]$$

$[B] = [\text{pode ser escolhido}]$; necessitando que k_m seja adaptado para reproduzir a $\vec{F}_m$ medida.

Biot-Savart:

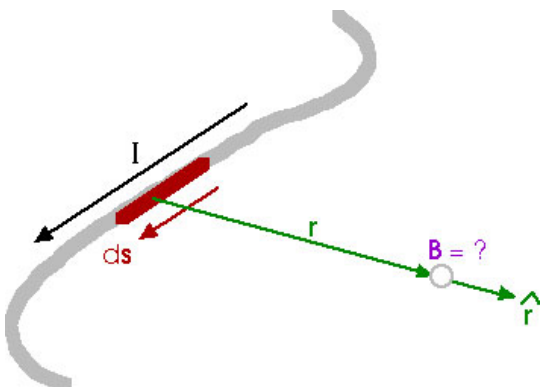
"Finalmente", chegamos na relação:

$$\vec{B} = k_m \frac{I \, d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$



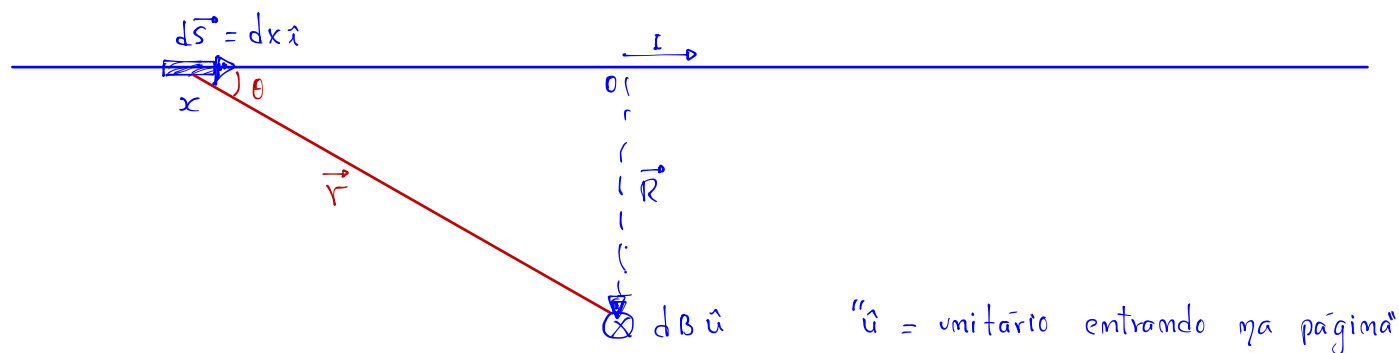
Vetorialmente, experimentos levaram à relação de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = k_m \frac{I \, d\vec{S} \times \hat{r}}{r^2}$$



$$\Rightarrow \vec{B} = k_m \cdot I \int \frac{d\vec{S} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{sobre a linha de corrente})$$

Para um fio retilíneo infinito:



$$\vec{B} = K_M I \cdot \int \frac{d\vec{S} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{B} = K_M I \int \frac{dx \cdot I \cdot \sin(\theta)}{r^2} \hat{u} = K_M I \int \frac{\sin(\theta) \cdot dx}{r^2} \hat{u}$$

Mas: $r^2 = x^2 + R^2$

$$\sin(\theta) = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = K_M I \int \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \frac{1}{(x^2 + R^2)} dx \hat{u}$$

$$\vec{B} = K_M I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx \hat{u}$$

Rearranjando:

$$\vec{B} = K_M I \cdot R \int \frac{1}{\left[R^2 \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \right]^{3/2}} dx \hat{u}$$

$$\vec{B} = \frac{K_M I R}{R^{3/2}} \int \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}} dx \hat{u}$$

O que nos remete a uma substituição trigonométrica do tipo:

$$\frac{x}{R} = \tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow x = R \tan(\alpha)$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = R \sec^2(\alpha) \quad \Rightarrow \quad dx = R \sec^2(\alpha) d\alpha$$

Assim, temos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R^2} \int \frac{1}{(1 + \tan^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}} \cdot R \sec^2(\alpha) d\alpha \hat{u}$$

$$\text{Mas } 1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cdot R}{R^2} \int \frac{\sec^2(\alpha) d\alpha}{\sec^3(\alpha)} \hat{u}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R} \int \frac{1}{\sec(\alpha)} \cdot d\alpha \hat{u} \quad , \quad \text{mas } \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R} \int \cos(\alpha) \cdot d\alpha \cdot \hat{u}$$

Limites de integração: para $x = -\infty \Rightarrow \tan(\alpha) = -\infty \Rightarrow \alpha = -90^\circ$

para $x = \infty \Rightarrow \tan(\alpha) = \infty \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R} \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \cos(\alpha) d\alpha \hat{u}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R} \left[\sin(\alpha) \right]_{-90^\circ}^{90^\circ} \hat{u} = \frac{\mu_0 I}{R} \left(\sin(90^\circ) - \sin(-90^\circ) \right) \hat{u}$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 I}{R} \hat{u}$$



Notar que o sentido do campo magnético $\vec{B}$ circunda o fio de corrente. Assim, se tomarmos uma integral de linha a uma distância circular R do fio de corrente, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \cdot \oint \hat{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \oint dl$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \cdot 2\pi R$$

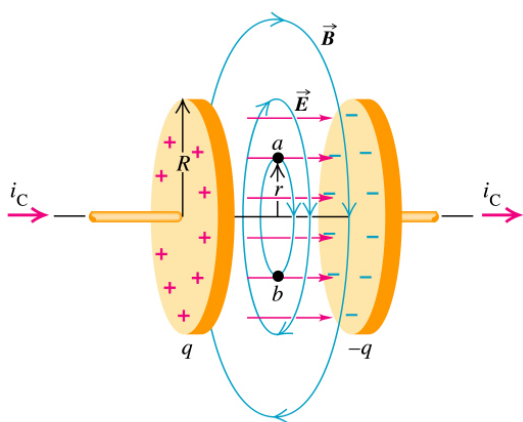
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi K_m I$$

(Eq. 3 - Max)

Esta equação diz - mesmo sem ainda conhecermos a unidade de corrente e o valor de K_m - que a integral de linha ao redor de um fio de corrente é proporcional à corrente que passa pelo fio.

$\vec{B}$ também é produzido por variação de campo Elétrico.

Digamos que no meio de um fio de corrente, situemos duas placas condutoras paralelas, como ilustrado abaixo.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

A corrente que chega em um lado é a mesma de sai do outro lado. Embora nenhuma carga real atravessasse de um lado para o outro - não existe uma corrente elétrica real - ainda assim observa-se um campo magnético entre as placas. Curiosamente, a intensidade e o sentido do campo magnético observado são idênticos aos obtidos (numa distância radial equivalente) fora das placas. Como se a corrente real estivesse lá.

das placas. Como se a corrente real estivesse lá.