# Expansão multipolar.

O potencial elétrico (consequentemente o campo $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$) obtido para o dipolo elétrico considerou uma distribuição particular de cargas, notadamente uma $+q$ distanciada de uma $-q$ por uma distância $\vec{d}$. Neste ponto vamos obter o potencial $V(\vec{r})$ para uma distribuição aleatória de cargas. Contudo, vamos manter todas as cargas dentro de um volume muito pequeno (digamos uma esfera de raio $\underline{a}$), e calcular o potencial elétrico em um ponto $\vec{r}$ tal que, $|\vec{r}| >> a$. Assim poderemos estimar o potencial em $\vec{r}$ através de uma expansão em série de Taylor.

Consideremos $\rho(r')$ a densidade volumétrica de carga elétrica. Dado um sistema referencial, uma quantidade de carga dentro de um volume infinitesimal $dV$ é

$$dq = \rho(\vec{r}\,')\,dV'$$

Portanto esta carga situada em $\vec{r}\,'$ colabora para o potencial $dV(\vec{r})$ em um ponto fixo $\vec{r}$ com

$$dV(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

O potencial devido à toda distribuição $dq$ é

$$V(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Como antes, vamos expandir $|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1}$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = \left[(\vec{r}-\vec{r}').(\vec{r}-\vec{r}')\right]^{-1/2}$$

$$= \left[r^2 - 2\vec{r}.\vec{r}' + r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\underbrace{\left[1 - \frac{2\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right]^{-1/2}}_{f(x)}$$

Novamente se $f(x) = (1+x)^n$

$$f(x) \approx f(0) + n(1+x)^{n-1}\Big|_{x=0} .x + \frac{1}{2}\underbrace{n(n-1)}_{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}}(1+x)^{n-2}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots$$

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}x^2 + \ldots$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(-\frac{2\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^2 + \ldots$$

Obs: Antes, quando estávamos interessados em uma aproximação linear (mantendo apenas até 1ª ordem da expansão) o termo $r'^2/r^2$ acabava por ser desprezado pois $\frac{r'^2}{r^2} \ll \frac{2\vec{r}.\vec{r}'}{r^2}$.

Neste caso, no entanto, estamos mantendo o termo de 2ª ordem na expansão e, como o segundo por de parênteses está ao quadrado, então $r'^2/r^2$ é da mesma ordem do primeiro termo:

$$\Rightarrow \left(-\frac{2\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^2 = \underbrace{\frac{4(\vec{r}.\vec{r}')^2}{r^4}}_{\propto \frac{r'^2}{r^2}} - \underbrace{\frac{4\vec{r}.\vec{r}'\, r'^2}{r^4}}_{\propto \frac{r'^3}{r^3}} + \underbrace{\frac{r'^4}{r^4}}_{\propto \frac{r'^4}{r^4}}$$

⇒ Portanto o primeiro termo dentro do segundo par de parenteses possui mesma ordem de grandeza que o segundo termo do primeiro par de parenteses, e devem ser mantidos:

Então vamos manter

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^2$$

$$f(x) \approx 1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}f(x) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} - \frac{r'^2}{2r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5}$$

$$\frac{1}{r}f(x) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right]$$

Voltando em $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ,

e lembrando que $\frac{1}{r}\cdot f(x) \approx \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\left\{\frac{\rho(\vec{r}')}{r} + \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{\rho(\vec{r}')}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right]\right\}dV'$$

Como a integral é através de $\underline{r}'$,

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_{V'}\rho(\vec{r}')\,dV' + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int_{V'}\rho(\vec{r}')\,\vec{r}'\,dV' + \int_{V'}(3^{\underline{o}}\text{ termo})\,dV'\right\}$$

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right]$$

Vamos rearranjar objetivando obter a forma apresentada no livro texto "Reitz Milford".

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')}{r^5} - \frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,'}{r^3}\right]$$

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{2}\left[3\frac{(x_i x_i')(x_j x_j')}{r^5} - \frac{x_i' x_i'}{r^3}\right]$$

$\Rightarrow x_i x_i' = \vec{r}\cdot\vec{r}\,'$ "deve ser somado por todos os valores possíveis para $i$"

"idem para $j$"

$\Rightarrow$ Multiplicando o segundo termo dentro dos colchetes por $r^2$ "$r^2 = x_j x_j$" $\longrightarrow$ e dividindo também.

Obs: o índice é trocado pois refere-se a um produto escalar independente do realizado para $r'^2$.

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{2}\left[3\frac{(x_i x_i')(x_j x_j')}{r^5} - \frac{(x_j x_j)(x_i' x_i')}{r^5}\right]$$

Isto nos permite retirar o fator $1/r^5$ dos colchetes.

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{2r^5}\left[3(x_i x_j)(x_i' x_j') - x_i x_j \delta_{ij}\, r'^2\right]$$

$x_i' x_i'$

$x_j x_j = x_i x_j \delta_{ij}$

$$3^{\underline{o}} \text{ termo} = \frac{\rho(\vec{r}\,')\, x_i x_j}{2r^5}\left[3x_i' x_j' - \delta_{ij}\, r'^2\right]$$

Levando de volta à integral:

$$\boxed{V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{1}{r}\int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \, dV' + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \, \vec{r}\,' \, dV' + \frac{x_i x_j}{2r^5}\int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[ 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right] dV' \right\}}$$

"Para o 3º termo → deve-se somar por $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$."

Após um procedimento algébrico, é comum que a situação física envolvida fique "momentaneamente" esquecida, aumentando o grau de abstração do problema abordado.

É relevante então repensarmos:

(i) Na origem do problema

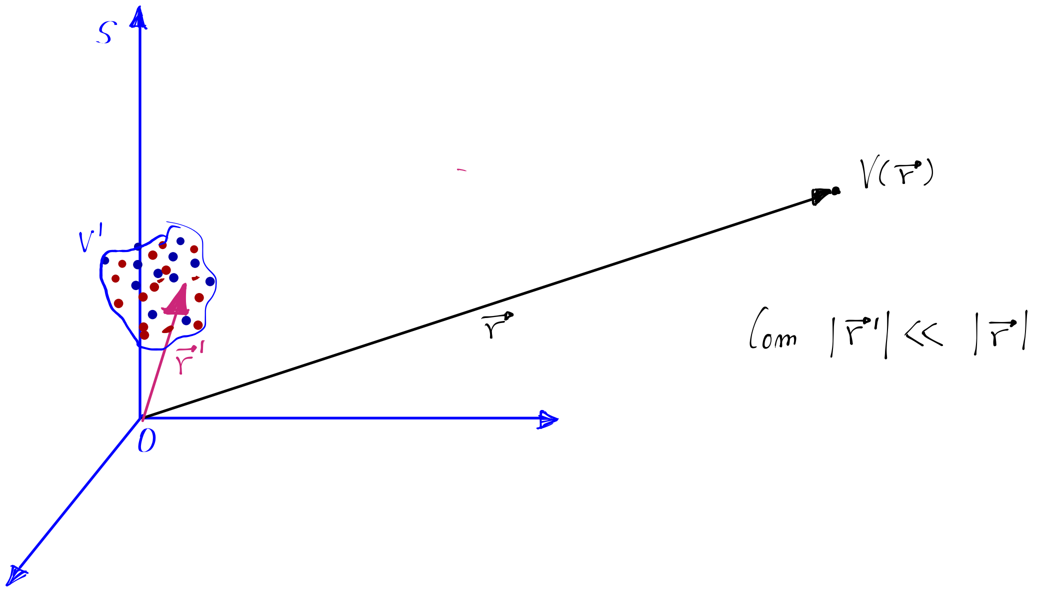
(ii) Nas técnicas de manipulação das expressões iniciais
"Neste caso, aproximação por série de Taylor mantendo termos até a 2ª ordem"

(iii) Baseando-se nos itens anteriores analisarmos a ponte de reconhecermos o significado físico de cada termo da expressão final.

Vamos passo a passo:

(i) Qual a origem do nosso problema?

Foi considerada uma distribuição de carga $\rho(\vec{r}\,')$ tal que, $\rho(\vec{r}\,') \neq 0$ apenas em uma região próxima à origem. Adicionalmente, o interesse foi em $V(\vec{r})$ em regiões distantes da origem tal que, $|\vec{r}| \gg \vec{r}\,'$; como representado abaixo:




(ii) Usando o posto que $|\vec{r}\,'| \ll |\vec{r}|$, expandimos $V(\vec{r}) = k_e \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$ mantendo os termos dominantes até 2ª ordem.

Este procedimento resultou, após algum trabalho braçal, em um valor aproximado para $V(\vec{r})$ na forma:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\, dV' \right.$$

$V_{0°} \leftarrow$ termo de ordem zero (derivada de ordem zero na expansão)

$$+ \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'\, dV'$$

$V_{1º} \leftarrow$ termo de 1ª ordem

$$\left. + \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[ 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right] dV' \right\}$$

$V_{2º} \leftarrow$ termo de 2ª ordem

**Análise do termo de ordem zero:**

$$V_{0°} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

Realizando a integral fica $\Rightarrow \int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\, dV' =$ Carga dentro de $V'$ $(Q)$.

Portanto $V_{00}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ; que representa o potencial eletrostático considerando que toda a carga elétrica está concentrada na origem.

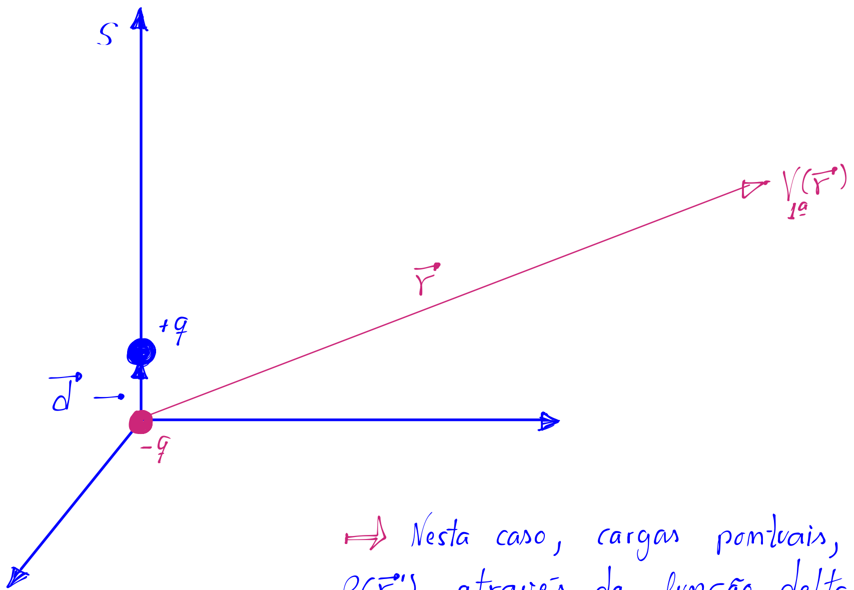
⟹ "Claro que isso (toda carga estar concentrada na origem) não necessariamente corresponde à verdade. Para corrigir este fato é que estão presentes os termos de 1ª e 2ª ordens; para corrigir a aproximação de ordem zero.

## Análise do termo de 1ª ordem.

$$V_{1^a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV'$$

Embora não seja imediato (pelo menos para mim) esta expressão equivale ao potencial de um dipolo situado na origem, se aplicada a um par de cargas com sinais contrários, distanciadas de $\vec{d}$, posicionadas "na origem".

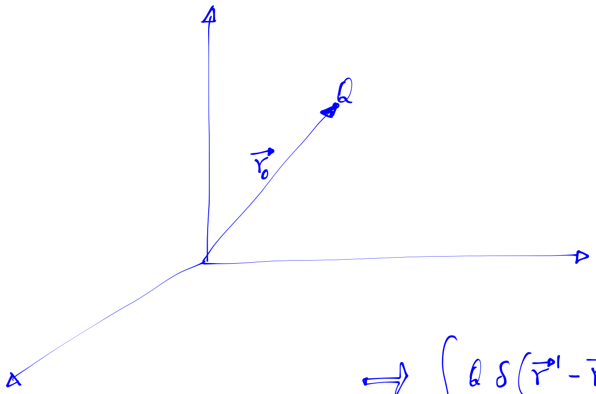
Vamos, como exercício, verificar esta afirmação.




⟹ Neste caso, cargas pontuais, é adequado definir-se $\rho(\vec{r}\,')$ através da função delta de Dirac $\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)$.

$\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)$ é definida tal que, $\displaystyle\int_V f(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\,dV' = f(\vec{r}_0)$

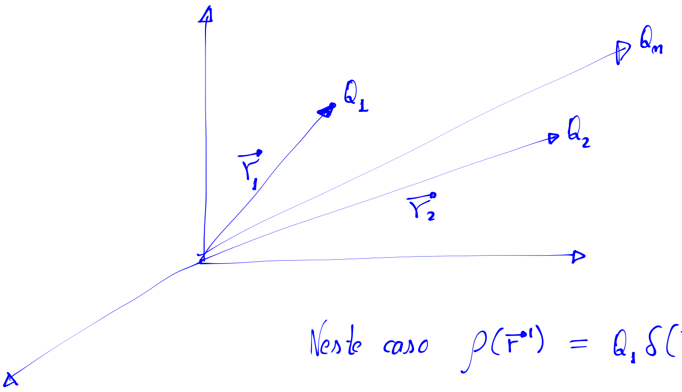
Aplicando para uma carga pontual situada no ponto $\vec{r}_0$ temos




$$\rho(\vec{r}\,') = Q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \int_{V'} Q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\,dV' = Q$$

$\Rightarrow$ Para mais de uma carga pontual:




Neste caso $\rho(\vec{r}\,') = Q_1\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_1) + Q_2\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_2) + \dots + Q_n\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n)$

$$Q_{total} = \int_{V'} \left[Q_1\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_1) + Q_2\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_2) + \dots + Q_n\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n)\right] dV'$$

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$\Rightarrow$ Portanto, para uma distribuição de cargas pontuais:

$$\rho(\vec{r}\,') = \sum_i Q_i\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_i)$$

Vamos aplicar esta densidade para o caso do dipolo elétrico, como ilustrado acima:

$$\rho(\vec{r}\,') = q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_+) - q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_-)$$

Onde $\vec{r}_+$ e $\vec{r}_-$ correspondem às posições das cargas positiva e negativa, respectivamente.

$$V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \, \vec{r}\,' \, dV'$$

$$V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left\{ \int_{V'} q \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_+) \, \vec{r}\,' \, dV' - \int_{V'} q \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_-) \, \vec{r}\,' \, dV' \right\}$$

Comparando com a definição $\int_{V'} f(\vec{r}) \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, dV' \equiv f(\vec{r}_0)$

e fazendo $f(\vec{r}\,') = q\vec{r}\,'$ ,

$$\Rightarrow \quad V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left\{ q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- \right\}$$

$$V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot q \underbrace{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}_{\vec{d}}$$

$\boxed{V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}}$ , que corresponde ao potencial de um dipolo elétrico situado na origem.

"Obviamente", o termo $V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \, \vec{r}\,' \, dV'$ , não é aplicável apenas para o caso dipolar tradicional (duas cargas distanciadas em $\vec{d}$), mas para qualquer $\rho(\vec{r}\,')$, mesmo se $\rho(\vec{r}\,')$ contar apenas com cargas positivas (ou negativas). Contudo, este termo recebe o nome de termo dipolar; mas em um contexto mais geral.

⊳ıı⊲

## Análise do termo de 2ª ordem.

A fim de criarmos alguma intuição sobre o termo de 2ª ordem

$$V_{2a}(\vec{r}) = \frac{x_i x_j}{2r^5}\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\left[3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right] dV' ,$$ vamos antes considerar

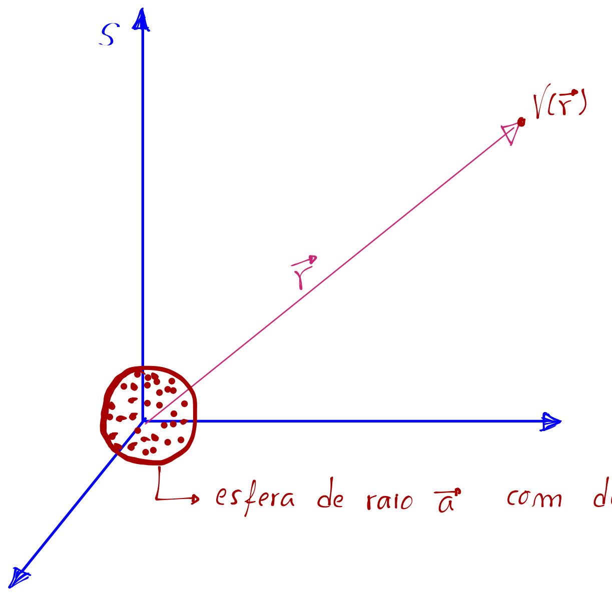
algumas situações particulares para $\rho(\vec{r}\,')$ nas proximidades da origem.

(1º caso) ⇒ Consideremos uma carga pontual situada na origem.

Obs: Esta situação é equivalente a considerarmos uma distribuição uniforme de carga ao redor da origem (centrada na origem). Similar ao potencial gravitacional; apesar de ser uma distribuição de carga, o potencial em pontos externos à região massiva é o mesmo que obteríamos com a mesma massa concentrada num único ponto ⇒ a origem do sistema coordenado:

$$V_g(\vec{r}) = \frac{GM}{r} \quad , \quad \text{para } r > R_{terra} .$$

Continuando: Temos a seguinte situação




esfera de raio $\vec{a}$ com densidade uniforme $\rho(\vec{r}\,')$.

$\Rightarrow$ Para o primeiro termo da expansão:

$$V_{0^o}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

É possível mostrar que para uma distribuição esférica de carga:

$$\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{Q}{r}$$ "Fica como exercício"

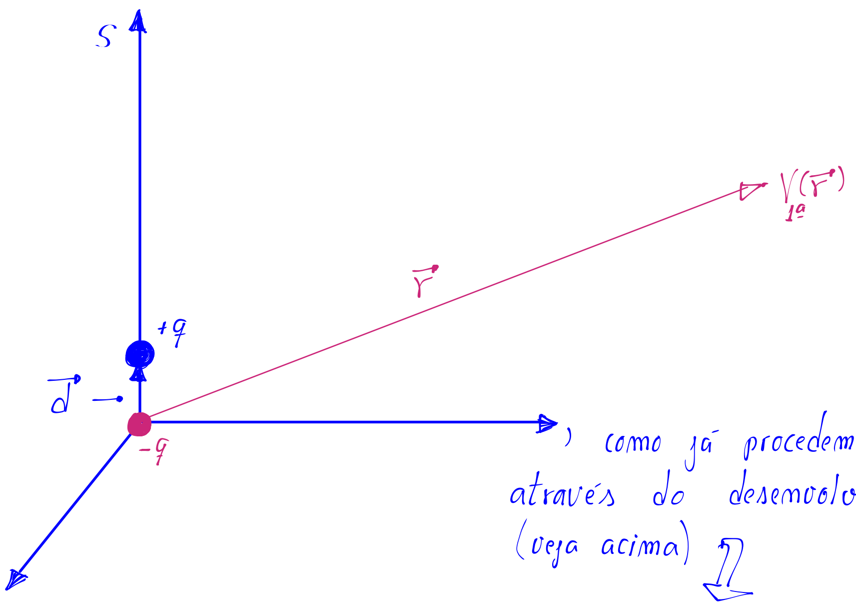
$$\boxed{\Rightarrow V_{0^o}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Este é o termo de monopolo. Em outras palavras o potencial devido a uma carga $Q$ na origem.
Como trata-se do potencial exato, então os termos de dipolo ($V_{1^a}$) e de quadripolo ($V_{2^a}$) devem ser nulos.

Exercício

Mostre que, para a distribuição de carga acima (monopolo na origem) os termos $V_{1^o}$ e $V_{2^o}$ são nulos.

De forma similar, se considerarmos uma distribuição dipolar do tipo



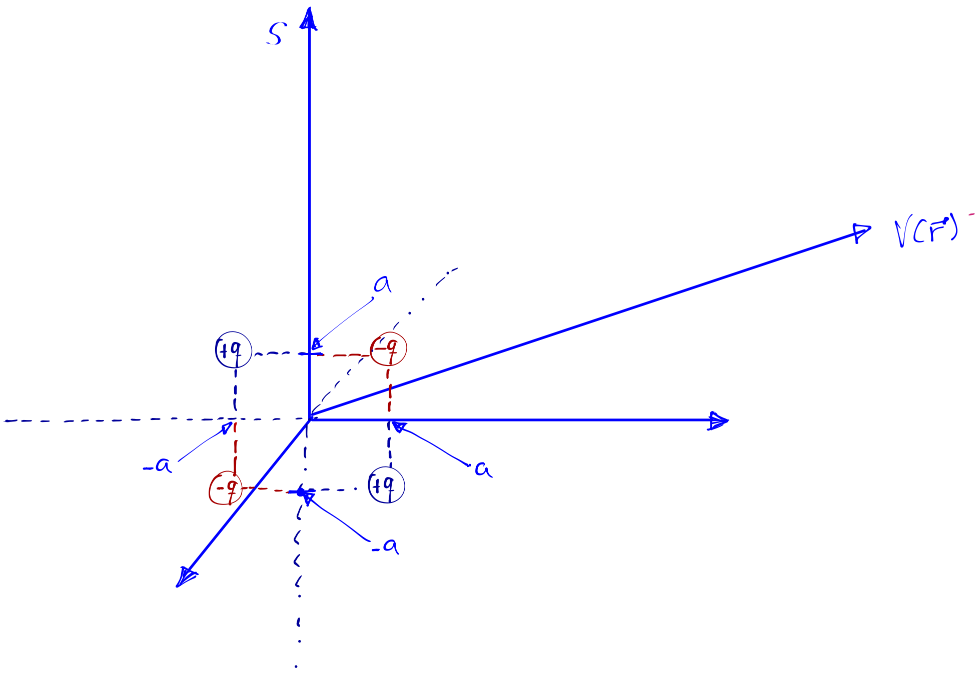

, como já procedemos acima, obtemos através do desenvolvimento do termo $V_{1^a}$ (veja acima)

$$V_{1^a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

Exercício: Calcular, para a distribuição de carga dipolar sugerida acima, os potenciais $V_{0^o}(\vec{r})$ e $V_{1^o}(\vec{r})$.
Obs: Interpretar o resultado.

## Problema resolvido

Vamos agora propor uma distribuição de carga como abaixo:




(1º) Verifique que $V_{0\circ}(\vec{r}) = 0$ "Termo de monopolo é nulo"

(2º) Para o termo dipolar temos:

$$V_{1a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\underbrace{\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV'}$$

$$\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV' = \int_{V'} \left[q\,\delta(\vec{r}-a\hat{\imath}) + q\,\delta(\vec{r}+a\hat{\imath}) + q\,\delta(\vec{r}-a\hat{\jmath}) + q\,\delta(\vec{r}+a\hat{\jmath})\right] r'\,dV'$$

$$\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV' = qa\hat{\imath} - qa\hat{\imath} + qa\hat{\jmath} - qa\hat{\jmath}$$

$$\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV' = \text{zero}$$

$\Rightarrow$ Portanto $V_{1a}(\vec{r}) = \text{zero}$ , e o termo dipolar também zera.

(3) Para o termo Quadrupolar:

$$V_{2^o}(\vec{r}) = \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[ 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right] dV'$$

Esta expressão é comumente escrita na forma

$$V_{2^o}(\vec{r}) = \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{ij} \qquad \text{Sendo} \qquad Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[ 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right] dV'$$

"Note que pela convenção da soma de Einstein, o símbolo de somatório pode ser omitido"

O procedimento é "simples" ⇨ Realizar a soma passando por $i = 1, 2, 3$ e por $j = 1, 2, 3$.

⇨ Fixa-se, por exemplo, $j = 1$ e soma-se $(j, i) = (1,1), (1,2), (1,3)$, depois fixa-se $j = 2$ somando por $(2,1)$, $(2,2)$ e $(2,3)$; $j = 3 \longleftrightarrow$ somar $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$.

$$\sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij} = x_1 x_1 Q_{11} + x_1 x_2 Q_{12} + x_1 x_3 Q_{13}$$
$$+ x_2 x_1 Q_{21} + x_2 x_2 Q_{22} + x_2 x_3 Q_{23}$$
$$+ x_3 x_1 Q_{31} + x_3 x_2 Q_{32} + x_3 x_3 Q_{33}$$

"Note que esta soma assume uma forma matricial, um tensor com nove componentes"

De Fato, diretamente na expressão

$$V_{2^o}(\vec{r}) = \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[ 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right] dV,$$

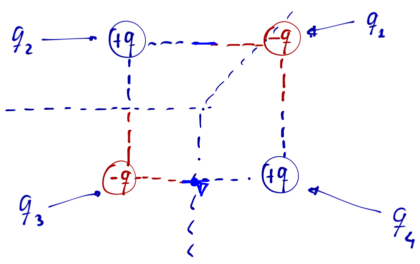
como $x_i x_j = x_j x_i$, então as seis componentes fora da diagonal são iguais aos pares (matriz simétrica).

## Cálculos dos $Q_{ij}$:

### $Q_{11}$

Como tratam-se de cargas pontuais $\Rightarrow \rho(r') = \sum_K q_K \,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_K)$, trocar o índice para não confundir com os i, j das coordenadas.

$$Q_{11} = \int_{V'} \sum_K q_K \,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_K) \left[3x_1'^2 - r'^2\right] dV'$$




Vamos difinir
$$\left.\begin{array}{l} x_1' \equiv x' \\ x_2' \equiv y' \\ x_3' \equiv z' \end{array}\right\} \text{ Coordenadas de } \rho(r'). \text{ "das cargas".}$$

$$Q_{11} = \int_{V'} \left[-q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_1}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_3}\right) + q\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_4}\right)\right]\left[3x'^2 - r'^2\right] dV'$$

$$Q_{11} = q\left\{-\left(3x_{q_1}^2 - r_{q_1}^2\right) + \left(3x_{q_2}^2 - r_{q_2}^2\right) - \left(3x_{q_3}^2 - r_{q_3}^2\right) + \left(3x_{q_4}^2 - r_{q_4}^2\right)\right\}$$

Note que em nosso caso particular posicionamos as cargas no plano $yz$, e que $r_q^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Além disso, para a carga $q_1 \Rightarrow (x,y,z) = (a,a,0)$

" " " $q_2 \Rightarrow (x,y,z) = (-a,a,0)$

" " " $q_3 \Rightarrow (x,y,z) = (-a,-a,0)$

" " " $q_4 \Rightarrow (x,y,z) = (a,-a,0)$

$$\boxed{Q_{11} = q\left\{-\left(3a^2 - 2a^2\right) + \left(3a^2 - 2a^2\right) - \left(3a^2 - 2a^2\right) + \left(3a^2 - 2a^2\right)\right\} = \text{zero}}$$

### $Q_{22}$

"$i = 2$, $j = 2$"

$$Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left[3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right] dV'$$

$$Q_{22} = \int_{V'} \left[-q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_1}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_3}\right) + q\left(\vec{r}' - \vec{r}_{q_4}\right)\right]\left[3y'^2 - r'^2\right] dV'$$

$$\boxed{Q_{22} = q\left\{-\left(3a^2 - 2a^2\right) + \left(3a^2 - 2a^2\right) - \left(3a^2 + 2a^2\right) + \left(3a^2 - 2a^2\right)\right\} = zero}$$

$\boxed{Q_{33}}$

De forma similar: $Q_{33} = 0$

$\boxed{Q_{21}}$

$$Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right] dV'$$

$$Q_{21} = \int_{V'} \left[-q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_1}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_3}\right) + q\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_4}\right)\right]\left[3y'x'\right] dV'$$

$$Q_{21} = q\left\{-3a^2 - 3a^2 - 3a^2 - 3a^2\right\}$$

$\boxed{Q_{21} = -12qa^2} \longrightarrow \boxed{Q_{12} = -12qa^2}$

$\boxed{Q_{23}}$

$$Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \left[3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right] dV'$$

$$Q_{23} = \int_{V'} \left[-q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_1}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_3}\right) + q\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_4}\right)\right]\left[3y'z' - 0\right] dV'$$

Não há componente $z$: $3y'z' = 0$.

$$Q_{23} = 0 = Q_{32}$$

$$Q_{31} = Q_{13} = \int_{V'} \left[-q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_1}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_2}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_3}\right) + q\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_{q_4}\right)\right]\left[\underbrace{3x'z'}_{zero} - 0\right] dV'$$

$\Rightarrow Q_{31} = Q_{13} = zero$

Portanto, representando em uma matriz $Q_{ij}$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -12qa^2 & 0 \\ -12qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

O potencial é dado por:

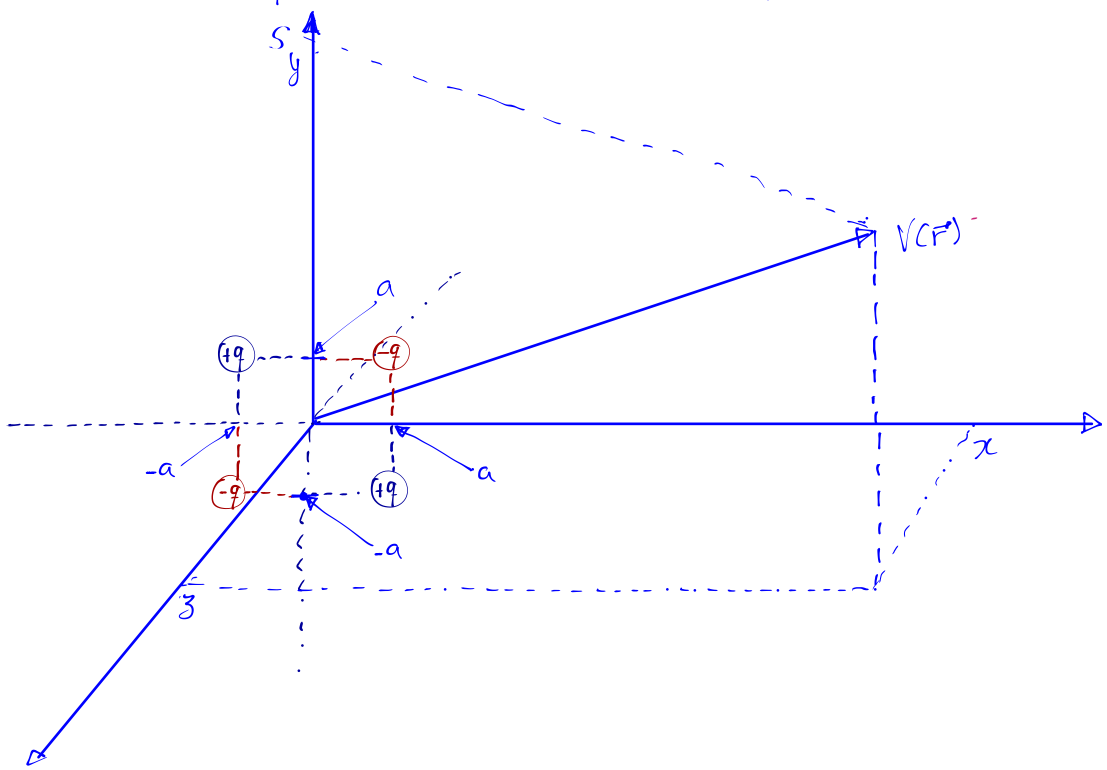
$$V_{2^o}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{ij}$$

$$V_{2^o}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r^5} \left( x_1 x_1 Q_{11} + x_1 x_2 Q_{12} + x_1 x_3 Q_{13} + \cdots + x_3 x_3 Q_{33} \right)$$

Mantendo apenas os termos com $Q_{ij} \neq 0$,

$$V_{2^o}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r^5} \left( x_1 x_2 Q_{12} + x_2 x_1 Q_{21} \right)$$

Lembrar que $x_1 x_2$ e $x_2 x_1$ são coordenadas de $\vec{r}$



Portanto: $V_{2^a}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{-12qa^2}{2r^5}\left(xy + yx\right)$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(-)\frac{6qa^2}{r^5} \cdot 2xy$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{12qa^2}{r^5} \cdot \left(r\,sen(\theta)\cos(\varphi) \cdot r\,sen(\theta)\,sen(\varphi)\right)$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{12qa^2}{r^5} \cdot r^2 sen^2(\theta)\,sen(\varphi)\cos(\varphi)$$

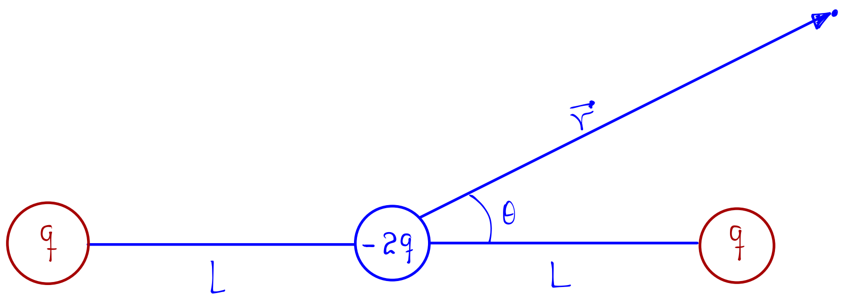
$$V_{2^o}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6qa^2}{r^5}\, r^2 sen(\theta)\,sen(2\varphi)$$

$$\boxed{V_{2^a}(\vec{r}) = -\frac{6qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} sen(\theta)\,sen(2\varphi)}$$

"Lembrando que $V_{monopolo} = V_{dipolo} = zero$.

Problema:

Considere uma distribuição de cargas como abaixo:




Mostre que $V(\vec{r}) = \dfrac{QL^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ , para $r \gg L$.