A equação (1) depende apenas de x. Separar a equação (2).

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_1$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = ct_1 + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

De forma similar, cada lado é igual a uma constante.

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = Cte_2$$

$$ct_1 + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = Cte_2 \implies \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_2 - cte_1$$

Portanto "temos" que resolver

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Cte_1 & (1)^* \\[2ex] \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -Cte_2 & (2)^* \\[2ex] \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_2 - cte_1 & (3)^* \end{cases}$$

Soluções:

(1) $$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Cte_1 \xrightarrow{\text{como } X \text{ depende só de } x} \frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = Cte_1$$

$$\implies \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = cte_1 X(x)$$

$$\implies X(x) \propto e^{\alpha x} \implies \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\Longrightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} = cte_1 \, e^{\alpha x}$$

$$\alpha = \pm \sqrt{cte_1}$$

Então $X(x)$ assume a forma geral

$$\boxed{X(x) = X_0 \, e^{\pm \sqrt{cte_1}\, x}}$$

Vamos definir que

$$\begin{cases} cte_1 \equiv a \\ -\,cte_2 = b \\ \text{Segue (veja acima nas equações } (1)^*, (2)^* \text{ e } (3)^*). \\ cte_2 - cte_1 = -(a+b) \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} X(x) = X_0 \, e^{\pm\sqrt{a}\, x} \\ Y(y) = Y_0 \, e^{\pm\sqrt{b}\, y} \\ Z(z) = Z_0 \, e^{\pm i \sqrt{a+b}\, z} \end{cases}$$

Onde X_0, Y_0 e Z_0 são constantes.

A solução total é $V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\Longrightarrow V(x,y,z) = \sum_{ab} C_{ab} \, e^{\pm\sqrt{a}\, x} \cdot e^{\pm\sqrt{b}\, y} \cdot e^{\pm i\sqrt{a+b}\, z}$$

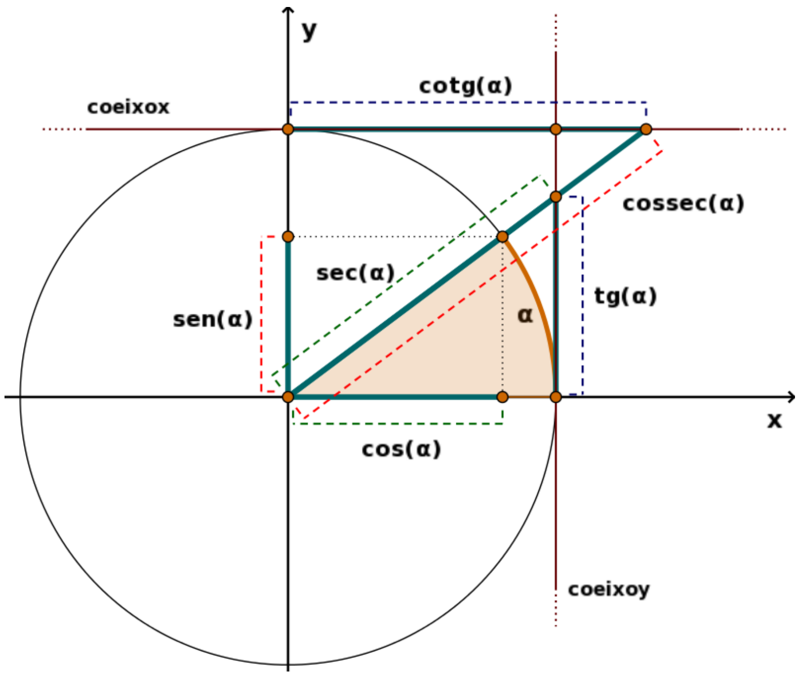
Nota: Porque a soma em <u>ab</u> ?

"Fica como exercício conceitual".

Análise: Sabemos que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$. Esta relação complexa não é tão "complexa" como possa parecer. A notação complexa pode ser pensada como uma relação vetorial num espaço bidimensional. No caso, posiciona-se $\cos(\theta)$ no eixo x (por convenção) e $\mathrm{sen}(\theta)$ no eixo y.

"Algo do tipo" $\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ equivale à $\cos(\theta)\hat{\imath} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{\jmath}$.

Portanto, $e^{i\theta}$ denota uma função angular no ciclo trigonométrico: em termos de $\cos(\theta)$ e $\mathrm{sen}(\theta)$.



Vamos aplicar o resultado acima para o caso especial de $a + b = 0$.

$\Longrightarrow$ $b = -a$, e as soluções são do tipo

$$V(x,y,z) = V_0\, e^{\pm\sqrt{a}\,x}\, e^{\pm\sqrt{-a}\,y}\, \cancel{e^{0z}}^{\,1}$$

$$V(x,y,z) = V_0\, e^{\pm\sqrt{a}\,x}\, e^{\pm i\sqrt{a}\,y}$$

$\Longrightarrow$ V só varia se variarem as coordenadas x e/ou y.

Observe, noentanto, que não valamos nada sobre a constante $\underline{a}$; portanto, ainda não podemos afirmar qual das duas exponenciais é complexa:

<u>Caso 1</u>: Se $a < 0$, então $e^{\pm\sqrt{-|a|}\,x} = e^{\pm i\sqrt{|a|}\,x}$

Similarmente: $e^{\pm i\sqrt{-|a|}\,y} = e^{\pm i.i\sqrt{|a|}\,y} = e^{\pm\sqrt{|a|}\,y}$

Resultando em:

$$V(x,y) = V_0\, e^{\pm i\sqrt{|a|}\,x} \cdot e^{\pm\sqrt{|a|}\,y}$$

Perceba que continuamos com uma exponencial complexa e uma real. Diferenciando apenas que agor está explícito que a complexa está em $\underline{x}$.

Caso 2: $a > 0 \Longrightarrow a \equiv |a|$

$$\Longrightarrow V(x,y) = V_0\, e^{\pm\sqrt{|a|}\,x} \cdot e^{\pm i\sqrt{|a|}\,y}.$$

Portanto, se $a+b=0 \Longrightarrow$ os sinais de $\underline{a}$ (consequentemente b) definem qual será a exponencial complexa.

⊛ Mas onde está a física ?

Suponho que neste ponto a física tenha ficado em segundo plano dando lugar a um procedimento "puramente matemático".

Voltemos às relações originais e vamos tentar extrair algumas informações físicas do caso particular abordado acima.

$$\begin{cases} X(x) = X_0\, e^{\pm\sqrt{a}\,x} \\ Y(y) = Y_0\, e^{\pm\sqrt{b}\,y} \\ Z(z) = Z_0\, e^{\pm i\sqrt{a+b}\,z} \end{cases}$$

⊛ A primeira imposição foi que $\underline{a+b=0}$.

Isto significa que $Z(z) = Z_0$; significa que o potencial não varia quando se muda $\underline{z}$ (é constante para cada valor de $\underline{x}$ e $\underline{y}$)

Mas o que isso significa do ponto de vista do campo elétrico?

$\Longrightarrow$ A componente $\underline{z}$ do campo elétrico é

$$E_z = -\vec{\nabla}_z (V)$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left[V(x,y)\right] = \text{zero}$$

$$E_z = 0$$

"Como esperado pois o potencial não muda em direções perpendiculares ao campo elétrio."

Portanto $\underline{a+b} = 0$ define que o campo elétrico não possui componente z.

Vamos analisar este resultado olhando diretamente no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} X(x) = X_0\, e^{\pm\sqrt{a}\,x} \\ Y(y) = Y_0\, e^{\pm i\sqrt{a}\,y} \\ Z(z) = Z_0\, e^{\pm i\sqrt{a+b}\,z} \end{cases}$$

Como vimos, $a>0$ ou $a<0$ apenas define qual exponencial (em $\underline{x}$ ou $\underline{y}$) será complexa. Em outras palavras, $a>0$ ou $a<0$ corresponde a um giro de $\underline{90^\circ}$ do eixo coordenado.

Vamos então assumir $\underline{a>0}$.

$$\begin{cases} X(x) = X_0\, e^{\pm\sqrt{a}\,x} \\ Y(y) = Y_0\, e^{\pm i\sqrt{a}\,y} \\ Z(z) = Z_0\, e^{\pm i\sqrt{a+b}\,z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se $a>0$ então o sinal positivo na exponencial em x pode ser descartado, caso contrário $X(x)=\infty$ quando $x\to\infty$ e o potencial fica indeterminado.

$$\Rightarrow X_1(x) = X_0\, e^{-\sqrt{a}\,x}$$

$*$ Mas esta solução só é válida para $x>0$ pois $X_1(-\infty)=\infty$

$\therefore$ Se $a>0$ e $x>0$.

Por outro lado, para $Y(y)$ os sinais não produzem qualquer indeterminação pois se $a>0$, trata-se de uma exponencial complexa.

$$\Rightarrow Y_1(y) = Y_0\left[\cos(\sqrt{a}\,y) + i\,\text{sen}(\sqrt{a}\,y)\right]$$

$$\text{e} \quad Y_2(y) = Y_0'\left[\cos(\sqrt{a}\,y) - i\,\text{sen}(\sqrt{a}\,y)\right]$$

são soluções.

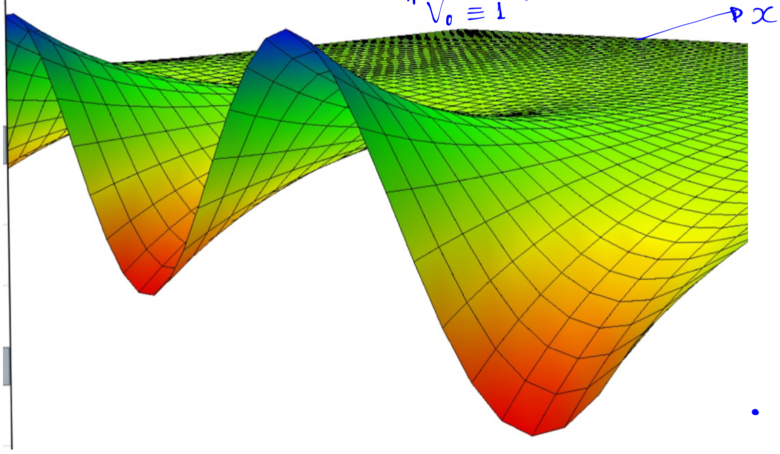
$*$ Mas o que isso significa?

$\Rightarrow$ Primeiro "lembremos" que quando temos mais de uma possibilidade para a solução, significa que nem todas as condições de contorno foram ainda aplicadas. Então as condições de contorno adicionais serão virão como um filtro das soluções possíveis.

$\Rightarrow$ Segundo: Uma solução complexa para uma dada variável significa que a função varia de forma oscilatória "$\cos(\theta)$, $\text{sen}(\theta)$, a menos de um ângulo de fase. Numa forma geral a solução geral é do tipo $\text{sen}(\theta+\phi)$, sendo θ esta associado a algum parâmetro conhecido – no caso $\theta=\sqrt{a}\,y$ – enquanto que $\underline{\phi}$ fica encarregado de adequar o resultado às condições de contorno."

Em outras palavras, significa que variando y o potencial oscila entre valores máximos e mínimos.

$V(x,y) = e^{-x} \operatorname{sem}(y)$ "$\sqrt{a} \equiv 1$" "$\phi \equiv 0$" "$V_0 \equiv 1$" " $a>0$ e $x>0$"



Ficam como exercícios as separações de variáveis em cilíndricas e esféricas "Sem necessidade de aplicar a um caso particular.".

A equação de Laplace em coordenadas esféricas.

Equação de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sen}(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Fazendo $V = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\,\text{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi\,\text{sen}^2(\theta)}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

Multiplicando tudo por $\text{sen}^2(\theta)$:

$$\frac{\text{sen}^2(\theta)}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\text{sen}(\theta)}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

Cada lado deve ser constante:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = cte_1 & (1) \\[2ex] \dfrac{\text{sen}^2(\theta)}{R}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) + \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\Theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\text{sen}(\theta)\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) = cte_1 & (2) \end{cases}$$

Em φ:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -cte_1$$

Obs: Para soluções com sentido físico esta constante precisa ser positiva.
"Mas porquê ?"

Vamos considerar uma equação idêntica com variável independente qualquer, digamos $\underline{x}$.

Temos $\dfrac{1}{y(x)}\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} = -K$

Resolvendo: $\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} = -K\,y(x)$

Portanto, $y(x)$ é do tipo $\underline{\underline{Ae^{\alpha x}}}$

$$\underbrace{\alpha^2 A e^{\alpha x}}_{\frac{d^2}{dx^2}\left(Ae^{\alpha x}\right)} = -K A e^{\alpha x}$$

$$\alpha^2 = -K$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-K}$$

$$\Longrightarrow \; y(x) = A e^{\sqrt{-K}\,x} + B e^{-\sqrt{-K}\,x}$$

Agora vamos considerar as possibilidades que produziriam comportamentos físicos diferentes:

Caso 1: $K = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = A + B$

$\boxed{y(x) = cte}$ → OK!, realmente trata-se de uma solução possível, afinal, se $y(x) = cte$, então

$$\underbrace{\frac{d^2 y(x)}{dx^2}}_{\text{zero pois } \frac{d^2}{dx^2}(cte)=0} = \underbrace{-K y(x)}_{\text{zero pois } K=0}$$

Caso 2: $\underline{K<0}$ $\Longrightarrow -K = \beta$ sendo $\beta > 0$

Neste caso: $y_{\beta>0}(x) = A' e^{\sqrt{\beta}\,x} + B' e^{-\sqrt{\beta}\,x}$

Note que esta solução pode ser fisicamente aceitável ou não, dependendo do tipo da variável independente $\underline{x}$ (se é linear ou angular, por exemplo).

Para $\underline{x}$ linear (sistema cartesiano retangular tradicional) $y_{\beta>0}(x)$ é perfeitamente aceitável:

Análise: $y_{\beta>0}(x) = A' e^{\sqrt{\beta}\,x} + B' e^{-\sqrt{\beta}\,x}$, com $\beta > 0$.

$\Longrightarrow$ No intervalo $0 < x \leqslant \infty$, a solução deve ter $A' = 0$, caso contrário, $A' e^{\sqrt{\beta}\,\infty}$ produziria um resultado indeterminado. Por outro lado $B' \neq 0$, tal que se $x \longrightarrow \infty$ $y_{\beta>0}(x) \longrightarrow$ zero.

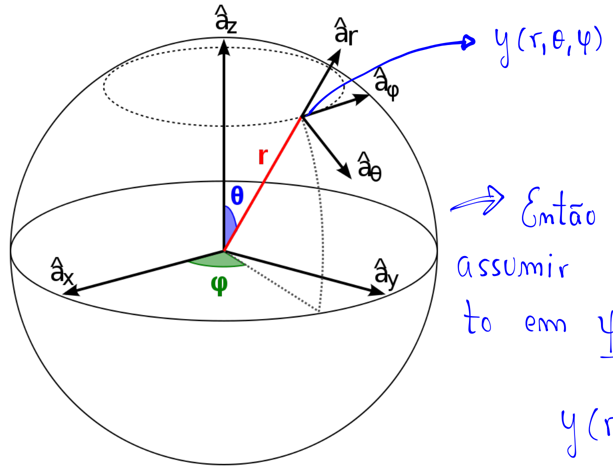
$\Longrightarrow$ No intervalo $-\infty \leqslant x < 0$ deve ocorrer o contrário.

Então

$$y_{\beta>0}(x) = \begin{cases} B' e^{-\sqrt{\beta}\,x} & \text{para} \quad 0 < x \leqslant \infty \\ A' e^{\sqrt{\beta}\,x} & \text{para} \quad -\infty \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Contudo, se a variável independente $\underline{x}$ for angular do tipo que estamos interessados $(y(\varphi))$; os resultados com $\underline{K<0}$ não fazem sentido. Porquê?

$\Longrightarrow$ Em coordenadas esféricas, se uma função $y(r, \theta, \varphi)$ possui um valor em um dado ponto do espaço



⇒ Então a função $y(r,\theta,\varphi)$ deve, necessariamente, assumir o mesmo valor após um giro completo em $\underline{\varphi}$, ou seja:

$$y(r,\theta,\varphi+2\pi) = y(r,\theta,\varphi).$$

É o que se espera de um resultado para $y(r,\theta,\varphi)$ com sentido físico.

Mas a solução com $K<0$;

$$\underset{\beta>0}{y(\varphi)} = A' e^{\sqrt{\beta'}\varphi} + B' e^{-\sqrt{\beta'}\varphi}$$

Obs: "fizemos $x \equiv \varphi$ a fim de analisarmos a mesma equação do ponto de vista angular em φ".

⇒ Claramente não há possibilidade, com $\beta>0$, de conseguirmos

$$y(\varphi+2\pi) = y(\varphi)$$

pois tratam-se de dois termos com exponenciais reais.

"$K=0$ funcionaria, mas $K=0$ já foi tratado, aqui estamos considerando apenas $K<0$"

Conclusão: "Para um solução em $\underline{\varphi}$ ser fisicamente aceitável não podemos contar com as soluções contendo $K<0$.

Caso 3: $K>0$.

Se $K>0$, digamos $K = m^2$ "O quadrado vem para evitarmos a raiz".

temos que $\quad y_m(\varphi) = A'' e^{im\varphi} + B'' e^{-im\varphi}$

*Lembrar que a presença de uma exponencial complexa indica soluções periódicas do tipo

$$f(\theta) = Cte \cdot \mathrm{sen}(\theta + \phi)$$

→ ângulo de fase que tem como finalidade adequar o fenômeno observado à condição inicial e/ou de contorno observada.

⇒ Significa que uma solução do tipo acima pode dar conta da condição

$$y(\varphi) = y(\varphi + 2\pi) \quad , \text{ pois } \quad e^{im\varphi} = e^{im(\varphi+2\pi)}$$

Voltando à origem do problema:

Estamos tentando resolver a equação

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -cte_1$$

Vimos que, considerando que a variável independente é φ, as soluções com sentido físico ocorrem com

$$cte_1 \geq 0 .$$

Além disso, evitando a raiz que aparece no expoente da solução

$$\Longrightarrow \; cte_1 \equiv m^2$$

$$\Longrightarrow \; \Phi(\varphi) = A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}$$

Mais um detalhe (puramente estético). "Definimos" $cte_1 \equiv m^2$ a fim de garantirmos que $cte_1 > 0$.

Mas m apareceu no resultado final sem estar elevado ao quadrado.

Pergunta: Podemos ou não fazer m negativo no resultado final?

Resposta: lembre que no lugar de $\underline{k}$ acabamos com o expoente na forma

$$e^{\pm i\sqrt{k}\,x} = e^{\pm i\sqrt{m^2}\,x}.$$

Mas $\sqrt{m^2}$ é $|m|$ e, portanto não podemos usar $m<0$ na solução acima.

Contudo, note que quando $\varphi<0$ o sinal das exponenciais inverte em

$$\phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}.$$

Podemos então condensar as soluções possíveis na forma

$$\phi(\varphi) = \sum_m C_m e^{im\varphi}$$

, deixando $\underline{m}$ assumir valores positivos e negativos; Veja que dado um valor para φ.

$\Longrightarrow$ Para cada módulo de m temos duas possibilidades: uma positiva e uma negativa

Digamos que $|m| = m_0$, como exemplo:

$$\Longrightarrow \phi(\varphi) = C_{m_0} e^{im_0\varphi} + C_{-m_0} e^{-im_0\varphi}$$

Que é o resultado encontrado originalmente.

Voltando: Estamos resolvendo as equações

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = cte_1 & (1) \\ \dfrac{sen^2(\theta)}{R}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) + \dfrac{sen(\theta)}{\Theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(sen(\theta)\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) = cte_1 & (2) \end{cases}$$

Para a equação em φ o resultado é

$$\boxed{\Phi(\varphi) = \sum_m C_m e^{im\varphi}}$$

, passando por todos os valores possíveis de $\underline{m}$.

Lembrando que $cte_1 = m^2$.

Queremos agora resolver

$$\frac{sen^2(\theta)}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{sen(\theta)}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = m^2$$

Rearranjando:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta\, sen(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(sen(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{sen^2(\theta)}$$

Novamente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) = cte_2 \\ -\dfrac{1}{\Theta\, sen(\theta)}\dfrac{d}{d\theta}\left(sen(\theta)\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \dfrac{m^2}{sen^2(\theta)} = cte_2 \end{cases}$$

Obs: Note que a constante proveniente da equação $\phi(\varphi)$ (m^2) aparece na equação em $\underline{\theta}$.

$\Rightarrow$ Significa que os $\underline{m}$ que não forem possíveis fisicamente na equação de $\phi(\varphi)$ (o que depende do problema físico abordado) tornarão a equação em $\underline{\theta}$ sem sentido também. Em outras palavras: os valores de cte_2 estarão validados (acoplados) pelos valores possíveis de m^2.

Para $R(r)$.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = cte_2$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = R\,cte_2$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - cte_2 R = 0$$

Tentemos $R = A r^{\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dr} = A\alpha r^{(\alpha-1)} = \alpha r^{-1} A r^{\alpha} = \alpha r^{-1} R(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{dr^2} = \alpha r^{-1}\frac{dR}{dr} + R(r)\,.\,\frac{d}{dr}\left(\alpha r^{-1}\right)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \alpha r^{-1}\,.\,\alpha r^{-1} R(r) + R(r)\,\alpha\,(-1)\,r^{-2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}R(r) - \frac{\alpha}{r^2}R(r)$$

$$\Rightarrow r^2\left(\frac{\alpha^2}{r^2}R(r) - \frac{\alpha}{r^2}R(r)\right) + 2r\frac{\alpha R(r)}{r} - cte_2 R = 0$$

$$\alpha^2\cancel{R(r)} - \alpha\cancel{R(r)} + 2\alpha\cancel{R(r)} - cte_2\cancel{R(r)} = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - cte_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4.cte_2}}{2}$$

Temos duas possibilidades para α.

$\Rightarrow$ As soluções são dos tipos:

$$R(r) = A\, r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2}} + B\, r^{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2}}$$

Se fizermos $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2} \equiv \ell$, no 1º termo $\therefore$

2º termo $\Rightarrow$

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2} = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2} = -\left(\frac{1}{2} + 1 - 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2}\right)$$ "foi adicionado zero"

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2} = -\left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2}} + 1\right)$$

$\hookrightarrow$ esta é uma constante que definimos como sendo $\underline{\ell}$.

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + cte_2} = -(\ell + 1)$$

Portanto:

$$\boxed{R(r) = A\, r^{\ell} + \frac{B}{r^{(\ell+1)}}}\,.$$

Obs: deve ficar claro para o leitor que este procedimento teve como único objetivo uma troca de constantes objetivando um formato mais enxuto para o resultado final.

<u>Resultado adicional:</u>

Definimos que $\dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4cte_2}}{2} \equiv \ell$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4cte_2} = 2\ell + 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 4\,Cte_2 = (2\ell+1)^2$$

$$Cte_2 = \frac{4\ell^2 + 4\ell + 1 - 1}{4}$$

$$Cte_2 = \ell^2 + \ell$$

$$\Rightarrow \boxed{Cte_2 = \ell(\ell+1)}$$

Usando este formato para a constante Cte_2 para a equação diferencial em $\underline{\theta}$:

$$-\frac{1}{\Theta\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2(\theta)} = cte_2$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{\Theta\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2(\theta)} = \ell(\ell+1)$$

Deve ser reiterado que:

1) Os valores possíveis de $\underline{m}$ podem ser definidos através de condições físicas plausíveis com relação à periodicidade em (φ).

2) Uma vez definidos os valores de $\underline{m}$ valores de $\underline{\ell}$ estarão definidos por tabela na equação diferencial em $\underline{\theta}$.

3) Somente os valores possíveis de $\underline{\ell}$ podem ser considerados plausíveis na equação diferencial em $\underline{R}$.

$\Rightarrow$ Resta encontrarmos as soluções para $\Theta(\theta)$.

Para $\Theta(\theta)$:

Após as separações anteriores:

$$-\frac{1}{\Theta\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2(\theta)}=\underbrace{\ell(\ell+1)}_{Cte_2}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2(\theta)-m^2\right]\Theta(\theta)+\mathrm{sen}(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)=0$$

Esta equação é transformada em um formato conhecido (Equação associada de Legendre) aplicando uma troca de variáveis, como segue:

$$u\equiv\cos(\theta)$$

$$\frac{du}{d\theta}=-\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{du}\frac{du}{d\theta}=-\mathrm{sen}(\theta)\frac{d}{du}$$

* usando esse

Voltando:

$$\left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2(\theta)-m^2\right]\Theta(\theta)-\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{d}{du}\left(-\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{d}{du}\Theta(u)\right)=0$$

$$\left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2(\theta)-m^2\right]\Theta(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{d}{du}\left(\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{d}{du}\Theta(u)\right)=0$$

Fazendo $\mathrm{sen}^2\theta=1-u^2$ chegamos em

$$\boxed{(1-u^2)\frac{d^2\Theta(u)}{du^2}-2u\frac{d}{du}\Theta(\theta)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta(u)=0}$$

Esta é a equação associada de Legendre.

Soluções da equação associada de Legendre:

$$\boxed{(1-u^2)\frac{d^2\Theta(u)}{du^2} - 2u\frac{d}{du}\Theta(\theta) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta(u) = 0}$$

A equação diferencial que gera os chamados polinômios de Legendre tem a forma:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_m(x)\right] + m(m+1)P_m(x) = 0$$

Rearranjando:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_m(x)}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}P_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$\Longrightarrow$ A equação de Laplace em $\Theta(\theta)$ assume o formato de Legendre quando $m=0$.

$$(1-u^2)\frac{d^2\Theta(u)}{du^2} - 2u\frac{d}{du}\Theta(\theta) + \left[\ell(\ell+1) - \cancel{\frac{m^2}{1-u^2}}\right]\Theta(u) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(1-u^2)\frac{d^2}{du^2}\Theta(u) - 2u\frac{d}{du}\Theta(\theta) + \ell(\ell+1)\Theta(\theta) = 0$$

Obs: Diferente das equações em φ e r, a equação em $\Theta(\theta)$, mesmo no formato mais simples (de Legendre), apresenta um grau de complexidade bastante grande. A solução da equação de Legendre

é um tópico extenso, e por isso possui um nome especial (as equações em φ e r não possuem pois são resolvidas com ferramentas matemáticas comuns). Vamos, portanto, nos limitar a uma apresentação direta da equação reduzida de Legendre.
A solução analítica completa será apresentada posteriormente em um apêndice.

Obs: (2) Um estudante pode "estranhar" o fato de estarmos utilizando uma solução menos geral pois fizemos $\underline{m=0}$. De fato, as

soluções de Legendre não são as mais gerais para a nossa equação inicial. Contudo, muitos problemas de interesse no eletromagnetismo apresentam simetria axial (dipolo, quadrupolo, objetos submetidos a campos externos, átomo de Hidrogênio em alguns estados particulares, etc...).

$\Longrightarrow$ Mas o que significa fazer $m=0$?

$\Longrightarrow$ Significa:

$$V(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

Onde verificamos que $\Phi = e^{\pm im\varphi}$, a menos de constantes.

$\Longrightarrow$ Se $m=0$ $\rightarrow$ $\Phi(\varphi) = cte$

$\Longrightarrow$ $V(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)$, ou seja, se $m=0$ a função fica dependente apenas de $\underline{r}$ e $\underline{\theta}$, o que equivale a uma simetria axial.

Em outras palavras, as soluções da equação de Legendre serão aplicáveis nesse tipo de problemas.

Soluções da Equação diferencial de Legendre (os polinômios de Legendre).

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Em nossa representação ⇓

$$(1-u^2)\frac{d^2}{du^2}\Theta(u) - 2u\frac{d}{du}\Theta(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$

$$\Theta_l(u) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{du^l}(u^2-1)^l$$

⇒ Lembrando que quando da troca de variáveis fizemos

$$u = \cos(\theta) .$$

⇒ É útil escrevermos a solução como função de θ, visto que esta é uma variável presente nos problemas que serão abordados:

$$\Rightarrow \qquad \Theta_l(\theta) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d(\cos(\theta))^l}(\cos^2(\theta)-1)^l .$$

Obs: A aparente "complicação" no denominador da derivada $\Rightarrow \partial(\cos(\theta))^l$, na verdade é só poluição visual. Trata-se de tratar $\cos(\theta)$ inteiro como variável.

Exemplo ⇓

Para $l = 1$, $\Rightarrow$ faça $\cos(\theta) \equiv x$

$$\Rightarrow P_1(\cos(\theta)) = \frac{1}{2.1!}\frac{d}{dx}\left(x^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{2} . 2x$$

$$\Rightarrow P_1\left(\cos(\theta)\right) = x = \cos(\theta)$$

Abaixo apresento uma tabela com os primeiros polinômios de Legendre em $\cos(\theta)$.

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

Finalmente, a solução geral para problemas com simetria axial $(m = 0)$ é

$$V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \qquad \text{“}\phi(\varphi) = cte\text{”}$$

$$R(r) = \frac{A}{r^l} + \frac{B}{r^{(l+1)}}$$

$\Theta(\theta) \Rightarrow$ Depende de l $\Rightarrow \Theta_l(\theta)$

$$\Rightarrow V_\ell(r,\theta) = \left(\frac{A}{r^\ell} + \frac{B}{r^{(\ell+1)}}\right) \cdot \Theta(\theta)$$

Obs: A equação acima diz que $V(r,\theta)$ possui a forma $\left(\frac{A}{r^\ell} + B/_{r^{(\ell+1)}}\right)\cdot\Theta$. Significa que qualque valor de ℓ utilizado (dentro dos possíveis - com sentido físico) mantém válida a solução.

$\Rightarrow$ Adicionalmente vimos, no teorema da linearidade da equação diferencial em questão, que uma soma das soluções possíveis também é solução. Então, uma solução que explicite este fato é:

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell \Theta_\ell(\theta) + \frac{B_\ell}{r^{(\ell+1)}}\Theta(\theta)\right]}\ .$$

Abaixo, uma tabela contendo o primeiros termos das soluções da equação de Laplace no caso de Simetria Axial.

ℓ	$r^\ell \Theta_\ell(\theta)$	$r^{-(\ell+1)}\Theta_\ell(\theta)$
0	1	r^{-1}
1	$r\cos(\theta)$	$r^{-2}\cos(\theta)$
2	$\frac{1}{2}r^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$	$\frac{1}{2}r^{-3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$
3	$\frac{1}{2}r^3\left(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right)$	$\frac{1}{2}r^{-4}\left(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right)$
4	$\frac{1}{8}r^4\left(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3\right)$	$\frac{1}{8}r^{-5}\left(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3\right)$

Aplicação

Vamos aplicar a soluções em um problema clássico:

⟹ Obtenção do potencial de uma esfera condutora em um campo elétrico uniforme:

Solução: Vamos primeiro analisar a situação de um ponto de vista qualitativo a fim de desenvolvermos maior intuição sobre o problema.

O que acontece quando um condutor é submetido a um campo elétrico?

⟹ As cargas elétricas se arranjam até se acomodarem numa distribuição que anula o campo elétrico dentro do condutor.

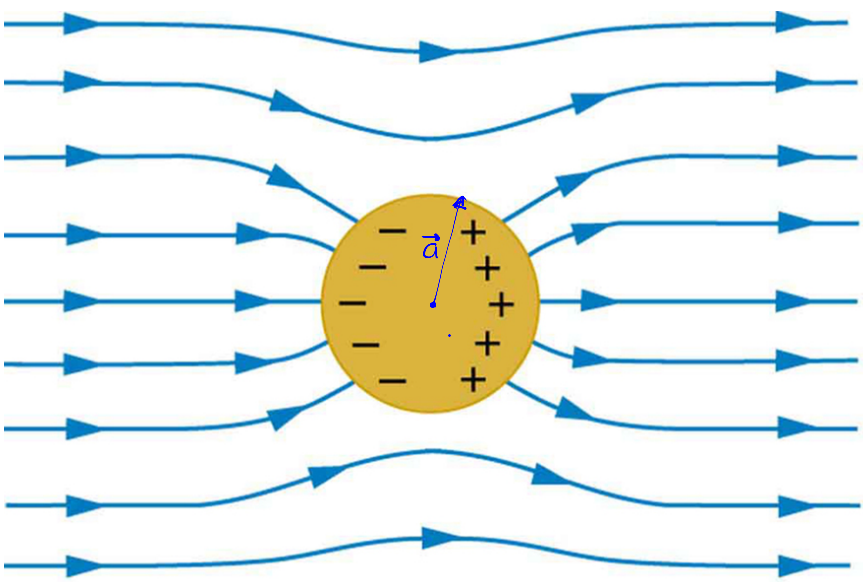
⟹ O resultado deste fato é que $\vec{E} = \vec{0}$ dentro do condutor e é perpendicular à superfície em pontos externos muito próximos à superfície (motivos já discutidos em sala).

⟹ Então o potencial é uma constante dentro do condutor ($V = V_0$).

⟹ Adicionalmente, é de se esperar que em pontos muito distantes do condutor, sua influência não seja percebida. Então, se assumirmos que a região submetida ao campo constante é muito maior que as dimensões do condutor, então este fato pode ser usado como condição de contorno em regiões muito distantes do condutor.

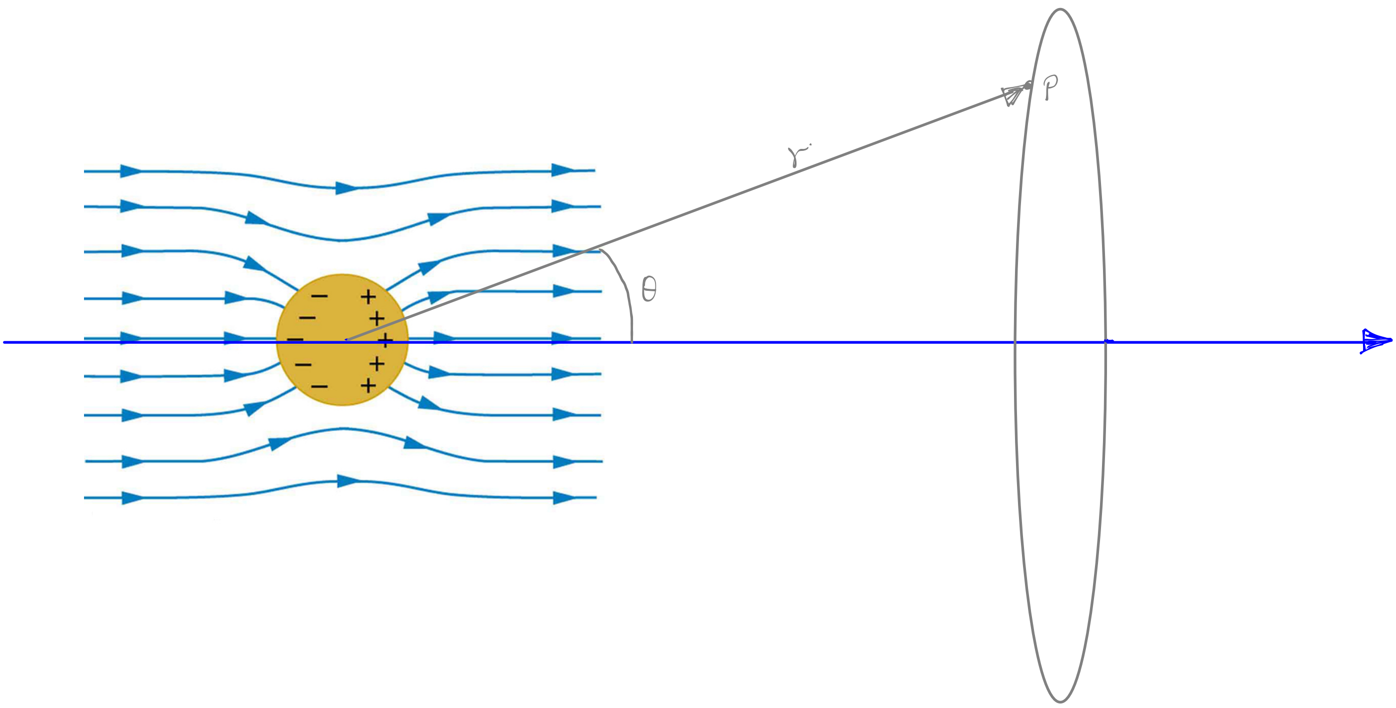
Portanto a geometria do problema é como a ilustrada abaixo.

⇩



⇒ Aplicarmos a solução com simetria axial da equação de Laplace a este problema depende de o problema apresentar simetria axial.

⇒ Uma rápida análise mostra que o eixo de simetria é:



"Imaginando de um ponto de vista tridimensional, qualquer ponto sobre o anel em φ possui o mesmo potencial, mesmo em uma região próxima à esfera condutora."

O potencial é do tipo:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l \Theta_l(\theta) + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta(\theta)\right].$$

O que temos a fazer é excluir, entre as infinitas soluções possíveis com a forma

$$A_l r^l \Theta(\theta) + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta(\theta),$$

aquelas que não descrevem a geometria e as condições de contorno expostas acima.

Condição 1) O potencial na esfera é $\underline{V_0}$.

$\Rightarrow$ Vamos procurar $V(r,\theta)$ que se reduza à V_0 quando $\underline{r \to a}$.

$$V(a,\theta) = V_0$$

Condição 2) O potencial em um ponto distante da esfera é

$$V(r,\theta)_{r\to\infty} = -E_0 z + Cte$$

Como $z = r\cos(\theta)$

$$\Rightarrow V(r,\theta)_{r\to\infty} = -E_0 r\cos(\theta) + cte$$

Análise: dentro de $A_l r^l \Theta_l(\theta) + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta(\theta)$, quais podem ser descartados?

$\Rightarrow$ O segundo termo $\left(\frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta(\theta)\right)$ zera quando $r\to\infty$; então na não deve ser excluído por isso não afeta a condição acima,

↳ "de que $V(r,\theta)_{r\to\infty} \propto \underline{r}$ e não a $1/r$.

$\Rightarrow$ Só o primeiro termo $\left(A_\ell r^\ell \Theta_\ell(\theta)\right)$ não zera, mas deve ser proporcional à r.

para concordar com $-E_0 r\cos(\theta)$. Portanto todos os termos com $\ell > 1$ devem ser descartados.

$$\Rightarrow V(r,\theta) = A_0 r^0 \Theta_0(\theta) + B_0 r^{-1}\Theta_0(\theta) + A_1 r^1 \Theta_1(\theta) + B_1 r^{-2}\Theta_1(\theta)$$

Usando a tabela:

$\Theta_0 = 1$ e $\Theta_1 = \cos(\theta)$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta)$$

Claramente $A_1 = -E_0$, pois se $r \to \infty$ $V(r,\theta) = cte - E_0 r\cos(\theta)$

pela condição 1 $V(a,\theta) = cte$

A única forma disto acontecer é com $B_0 = 0$ e combinando

$A_1 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta) = 0$ quando $r \to a$, pois assim restará apenas a constante A_0 que será $A_0 = V_0$.

$$\Rightarrow \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos(\theta) = 0 \quad \text{"Quando } r = a\text{"}$$

$$\Rightarrow A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \qquad (\times\, a^2)$$

$$\Rightarrow A_1 a^3 = -B_1$$

$$\Rightarrow B_1 = -A_1 a^3 \qquad \text{Como } A_1 = -E_0$$

$$\Rightarrow B_1 = E_0 a^3$$

Finalmente:

$$\boxed{V(r,\theta) = V_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos(\theta)}$$

Obtenção do campo elétrico $\vec{E}(r,\theta)$:

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = -\vec{\nabla} V(r,\theta) \qquad \text{"em esféricas"}$$

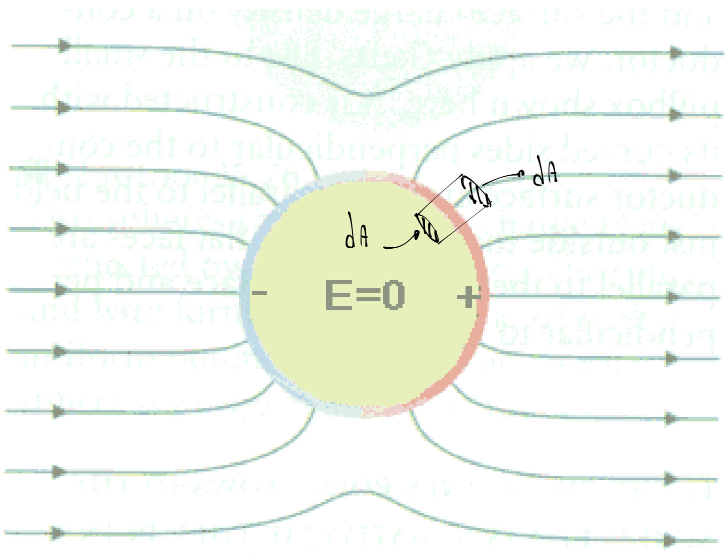
$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(V_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = E_0\cos(\theta)\hat{r} + \frac{2E_0 a^3}{r^3}\cos(\theta)\hat{r} +$$

$$- E_0 \text{sen}(\theta)\hat{\theta} + \frac{E_0 a^3}{r^3}\text{sen}(\theta)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)E_0\cos(\theta)\,\hat{r} + E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\text{sen}(\theta)\,\hat{\theta}}$$

Densidade superficial de cargas



$E_r \cdot \cancel{dA} = \frac{\sigma}{\epsilon}\cancel{dA}$ para $r = a$

$\sigma = \epsilon E$

Obs: Como o campo próximo à superfície é radial, então:

$\vec{E}\cdot d\vec{A} = E_r\, dA$ "em $r = a$".

$\Downarrow$

$$\Longrightarrow \quad \sigma = \epsilon E_r(r=a)$$

$$\sigma = \epsilon\, 3E_0 \cos(\theta)$$

Portanto $\sigma \rightarrow \sigma(\theta)$

$$\boxed{\sigma(\theta) = 3\epsilon E_0 \cos(\theta)}$$

Carga armazenada:

$$Q = \int_S \sigma\, dA = \int_S \sigma\, r\, d\theta\, r \operatorname{sen}(\theta)\, d\varphi$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\epsilon E_0 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\, r^2\, d\varphi\, d\theta$$

$$Q = 3\epsilon E_0 r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\, d\theta$$

$$Q = 3\epsilon E_0\, 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$Q = 3\epsilon E_0 \pi r^2 \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$Q = -\frac{3}{2}\epsilon E_0 \pi r^2 \left(\cos(2\pi) - \cos(0) \right)$$

$$Q = -\frac{3}{2}\epsilon E_0 \pi r^2 \left(1 - 1 \right) = \text{zero.}$$

Como deve ser.

Obs: Poderíamos ter usado a paridade das funções na integral em θ

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \text{zero.}$$

Solução em coordenadas Cilíndricas.

Repetindo os mesmos passos realizados durante a solução de $\nabla^2 V = 0$ em coordenadas esféricas; e considerando apenas problemas com $V(r,\theta)$ (potenciais que não dependem de z), conclui-se que:

$$V(r,\theta,z) \equiv R(r)\,\Theta(\theta)\,\underbrace{Z(z)}_{cte}$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\nabla^2\left[R(r)\,\Theta(\theta)\right] = 0$$

$$\nabla^2 V(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(R(r)\Theta(\theta)\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(R(r)\Theta(\theta)\right) = 0$$

Fica como exercício mostrar que o resultado é da forma abaixo.

$$V(r,\theta) = A_0 \ln(r) + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{ r^m\left[A_m \operatorname{sen}(m\theta) + B_m\cos(m\theta)\right] + r^{-m}\left[C_m \operatorname{sen}(m\theta) + D_m \cos(m\theta)\right]\right\}.$$

Exercício: Aplique o resultado acima para o cálculo de um linha reta infinita uniformemente carregada.