Soluções de problemas eletrostáticos.

Dada uma configuração conhecida de cargas, o problema eletrostático é resolvido de forma direta através de

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV' ;$$

de onde pode-se extrair o campo elétrico através da operação

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) .$$

"Obviamente" que a solução analítica para $V(x,y,z)$ ou $\vec{E}(x,y,z)$ depende de sermos capazes de desenvolvermos analiticamente a integral $\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$; o que pode ou não ser possível, dependendo de $\rho(\vec{r}')$.

Contudo, existem situações onde $\rho(\vec{r}')$ não é conhecida mas, em vez disso, são conhecidas algumas outras informações que indicam a forma como o potencial o campo elétricos estão distribuídos no espaço. Informações acerca da geometria e propriedades dos "armazenadores" de cargas elétricas.

De uma forma geral, se um problema eletrostático possui solução, sua solução deve concordar com as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

"Esta é a equação de Maxwell que trata dos problemas eletrostáticos; as demais estão associadas a processos dinâmicos"

$\boxed{\text{Equação de Poisson}}$

Trata-se de

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$; adicionando a informação $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}V\right) = \rho/\epsilon_0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho/\epsilon_0$$

Onde o operador ∇^2 é definido por $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ (produto escalar entre dois operadores gradiente).

$\rightarrow$ Equação de Poisson é

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho/\epsilon_0}\ .$$

O que isso significa fisicamente?

Resposta: O mesmo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, ou seja, relaciona o campo com aquilo que o produz. Adicionando a informação de que campo é uma medida da variação do potencial. Em outras palavras, campo é o mesmo que força (força por unidade de carga), para onde a força interna do sistema aponta, então é naquele sentido que o potencial decresce, afinal, se a carga de prova (positiva para efeito de análise) for deixada "solta", irá espontaneamente para o potencial mais baixo $\leftrightarrow$ ou, da mesma forma, irá no sentido para onde está sendo empurrada pelo campo (pela força).

Antes de detalharmos um pouco mais a equação de Poisson (Explicitarmos o operador $\vec{\nabla}$ em sistemas coordenados específicos a fim de interpretarmos o significado de cada termo fisicamente), vamos apresentar a equação de Laplace, que nada mais é que a própria equação de Poisson aplicada a uma região sem carga elétrica líquida $(\rho(\vec{r}) = 0)$.

Equação de Laplace:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \ .$$

Vamos agora tentar interpretar, sob um ponto de vista físico/matemático, as equações de Laplace e de Poisson.

Pela maior simplicidade (igual a zero), vamos começar pela equação de Laplace

$$\nabla^2 (V(\vec{r})) = 0 \ .$$

Também por simplicidade (apenas termos lineares, ou seja, sem variáveis angulares) vamos expressar o operador ∇^2 em coordenadas retangulares.

$$\Longrightarrow \ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\hat{\imath} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\imath} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Longrightarrow \ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ .$$

Este operador atua sobre uma função escalar (neste caso o potencial eletrostático) $V(x,y,z)$, que deve ser zero (se $\rho = 0$).

$$\Longrightarrow \ \boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(x,y,z) .}$$

Em princípio, vamos olhar pare esta expressão sob o ponto de vista matemático (Em seguida vamos analisar, mais uma vez, a relação entre a física e a matemática).

Pergunta: O que cada termo representa?

Para respondermos esta questão vamos realizar uma análise sobre uma situação física simples e cujo significado é compreendido por todos (estudantes de física em nível inicial de graduação).

Exemplo: $F = ma$ "Consideremos um movimento unidirecional em x".

$F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. "trata-se de uma derivada segunda de $\underline{x}$ com relação a $\underline{t}$."

Para o caso de $F_x = 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

Para o nosso exemplo, esta relação representa um $\underline{x}$ variando linearmente como função de $\underline{t}$. Como sabemos, trata-se do movimento retilíneo uniforme dado por:

$x(t) = x_0 + vt$. A solução é completa se soubermos a posição inicial $\underline{x_0}$ e a taxa de variação de $\underline{x}$ com relação à $\underline{t}$ (v).

De fato, o exemplo "óbvio" acima se aplica a qualquer função":

$$\Longrightarrow \text{se } \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0 \Longrightarrow f(x) = \underbrace{f(x)\Big|_{x=0}}_{\text{Valor da função no ponto de referência (no caso } x=0)} + \underbrace{f'(x)\Big|_{x=0}}_{\text{Taxa de variação de } f(x) \text{ com relação a } x} \cdot \overbrace{x}^{\text{variação em } x \text{ provocando variação no valor de } f(x)}$$

Podemos analizar o problema sob o ponto de vista da derivada segunda:

O que a derivada segunda representa?

$\Longrightarrow$ Representa a curvatura (concavidade) do gráfico $f(x)$. Em outras palavras, se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x} = 0$, então o gráfico de $\underline{f}$ com relação à $\underline{x}$ (mantendo constantes as demais dependências de f) possui curvatura zero, ou seja, é linear.

Voltemos ao problema original, a equação de Laplace.

$\Longrightarrow$ Considerando que $f = V(x,y,z)$ possa variar nas três direções:

$$\Longrightarrow \nabla^2 V(x,y,z) = \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} = 0.$$

$\hookrightarrow$ Claramente, estamos igualando à zero a soma de:
- três derivadas segundas
- três curvaturas
- três "acelerações"

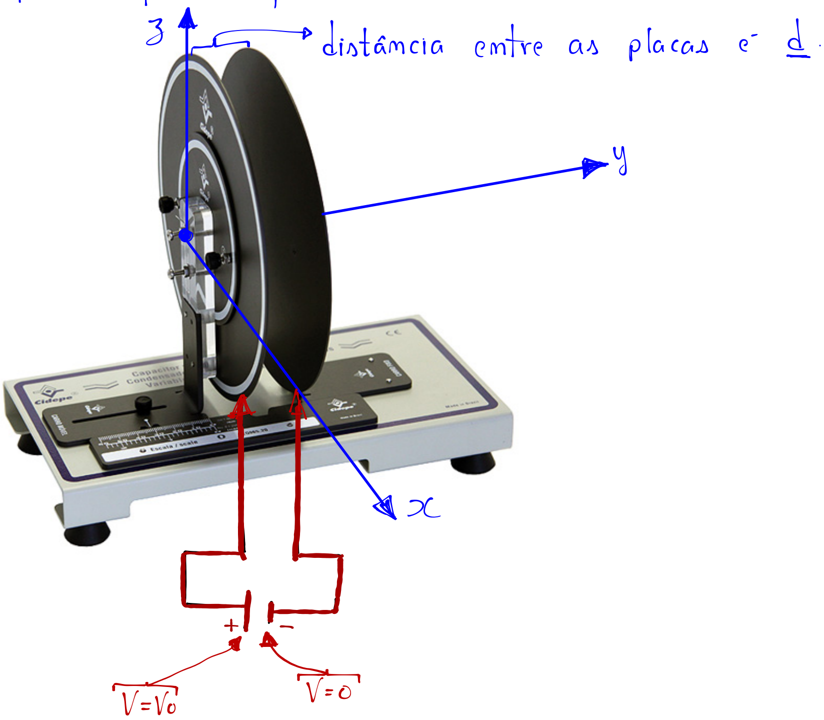
Vamos, novamente, por etapas. Vamos supor que $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ e $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ são nulos. Então, obviamente, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ também será.

Neste caso, se queremos encontrar $V(x,y,z)$, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

Se as informações que temos são apenas essas, então só o que podemos afirmar é que $V(x,y,z)$ varia linearmente nas três direções.

Vamos a um exemplo prático, didático e ilustrativo. Vamos calcular, a partir da equação de Laplace, o potencial entre as placas de um capacitor de placas paralelas, como ilustrado abaixo.



Vamos obter $V(x,y,z)$ na região entre as placas.

Das equações de Maxwell temos que:

$$\nabla^2(V) = -\rho/\epsilon_0$$

Na região entre as placas $\rho = 0$, logo,

$$\nabla^2(V) = 0 \qquad \text{"Equação de Laplace"}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(x,y,z) = 0$$

Vamos utilizar algumas informações dadas na ilustração acima.

Informações:

1) $V(x, 0, z) = V_0$

2) $V(x, d, z) = 0$

3) Notadamente, dado um valor $\underline{y}$ qualquer entre as placas; como o campo é $\vec{E} = E_0\hat{j}$, ou seja, é uniforme no sentido positivo de $\underline{y}$:

$\Rightarrow$ O potencial é constante em $\underline{x}$ e $\underline{z}$.

Este fato é intuitivo, dada a geometria do problema.
Podemos também verificar como segue:

$$\vec{E} = E_0\hat{j}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V(x, y, z))$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Como $\vec{E} = E_0\hat{j} \xrightarrow{\text{então}} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$,

Significa que $V(x, y, z)$ não varia nas direções $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

Obs: Não significa que são nulos, mas que são constantes
$\Rightarrow$ Em cada valor fixo de $\underline{y}$ $V(x, y, z)$ é uma constante diferente.

Voltando:

Se $\vec{E} = E_0\hat{j}$, então $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ $\qquad \Delta V_{xy} = \text{zero}$.

$\Rightarrow$ Derivando novamente: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

$$\Rightarrow \text{Como } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

"Lembre que $-\frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} = E_0\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} \neq 0$$

Como $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, então $V(y) = V(y)\Big|_{y=0} + \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=0} \cdot y$ "Com $\underline{x}$ e $\underline{z}$ fixos"

Mas $V(y)\Big|_{y=0} = V_0$ $\quad V(d) = 0$

$$\Rightarrow 0 = V_0 + \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=0} \cdot d$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\frac{V_0}{d}$$

$$\boxed{\Rightarrow V(y) = V_0 - \frac{V_0}{d} y}$$

Qual é o campo elétrico?

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}(V)$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(V_0 - \frac{V_0}{d}y\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(V_0 - \frac{V_0}{d}y\right)\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_0}{d}\hat{\jmath}}$$

Neste ponto, vamos falar sobre a equação de Poisson, em seguida voltaremos ao problema acima (capacitor) a fim de verificarmos a possibilidade de obtermos novas informações a partir da equação de Poisson.

A equação de Poisson é "simplesmente"

$\nabla^2(V) = cte$.

No caso do eletromagnetismo, trata-se de

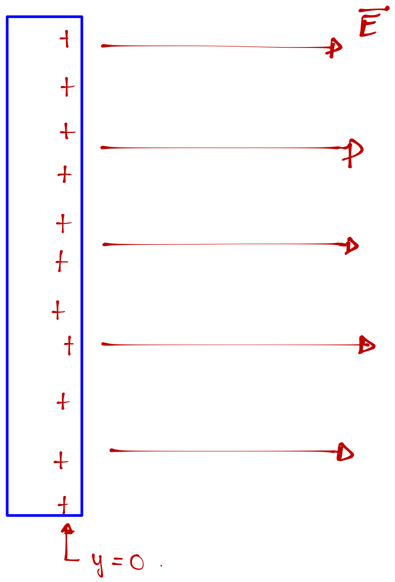
$$\nabla^2(V) = -\rho/\epsilon_0$$

"Obviamente", trata-se da operação de Laplace aplicada em regiões onde estão presentes as origens do potencial.

No caso do problema acima, quando aplicado nas placas do capacitor.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,0,z) = -\rho/\epsilon_0$$

Algo do tipo:



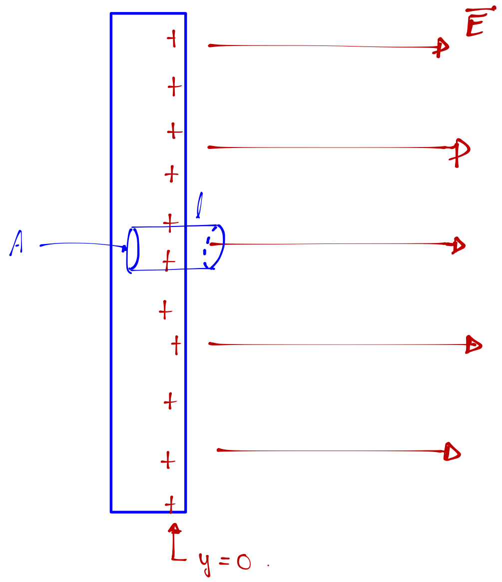
A forma mais intuitiva de resolvermos este problema, dentro do contexto do eletromagnetismo aplicado ao caso específico acima, é lembrarmos que

$$-\nabla^2(V) = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla} V) = \rho/\epsilon_0$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$; o fluxo através de um elemento de volume envol vend

Conhecemos $\vec{E}(y=0)$, na verdade vimos que $\vec{E}$ é constante:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d}\,\hat{j}$$



$$E.A = \frac{\rho A l}{\epsilon_0} \qquad \rho A l = \sigma A$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = E.\epsilon_0$$

$$\boxed{\sigma = \frac{V_0}{d}\,\epsilon_0}$$

, O que mostra a possibilidade de obtermos a distribuição de carga se conhecermos algumas informações geométricas e condições de contorno.

Resumindo: Basicamente, dadas as condições de contorno, geralmente os valores de V_i e de $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, em regiões geometricamente estratégicas (nas superfícies dos condutores), "podemos" obter $V(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ e $\rho(\vec{r})$.

$$\boxed{\text{Equação de Laplace em coordenadas esféricas:}}$$

Vimos, quando do desenvolvimento das equações de Maxwell, que o divergente de uma função vetorial $\vec{F}$ é

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\,\text{sen}(\theta)\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right).$$

Queremos $\nabla^2(V)$.

Mas $-\nabla^2(V) = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V)$, ou seja, para nosso caso particular basta fazermos $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$$-\vec{\nabla}V(r,\theta,\varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$\Longrightarrow$ Na equação acima basta fazermos $F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$; $F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}$ e $F_\varphi = -\frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\partial V}{\partial r}\cdot r^2\right] + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\text{sen}(\theta)\right] + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-\frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right]$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 V = -\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\text{sen}(\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Obs: A presença do sinal negativo deve-se ao fato de termos desenvolvido o Laplaciano a partir do divergente de $\vec{E}$. De um ponto de vista geral podemos fazer

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Então, para a equação de Laplace $(\nabla^2 V = 0)$, temos que resolver

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0}\,.$$

Para a equação de Poisson temos

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\rho/\epsilon_0}\,.$$

Obs: Analisar a origem do sinal negativo.

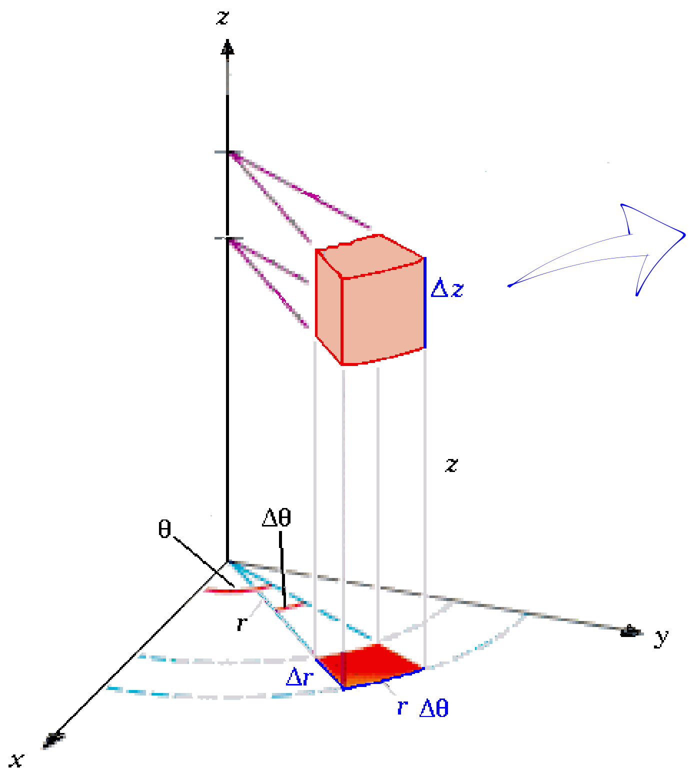
Coordenadas Cilíndricas.

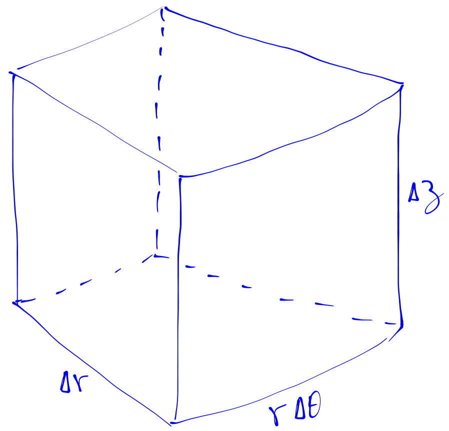
Objetivando uma breve revisão do sentido físico das Equações de Laplace e de Poisson. Vamos desenvolver, como um exercício, estas equações desde seus aspectos mais fundamentais.

Como no caso das coordenadas esféricas, vamos consideras inicialmente o divergente do campo elétrico.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0\,.$$

Vamos obter $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em coordenadas cilíndricas. Utilizando procedimento análogo ao adotado quando da obtenção de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ em coordenadas esféricas, vamos obter os fluxos através das faces de um elemento de volume em coordenadas cilíndricas.

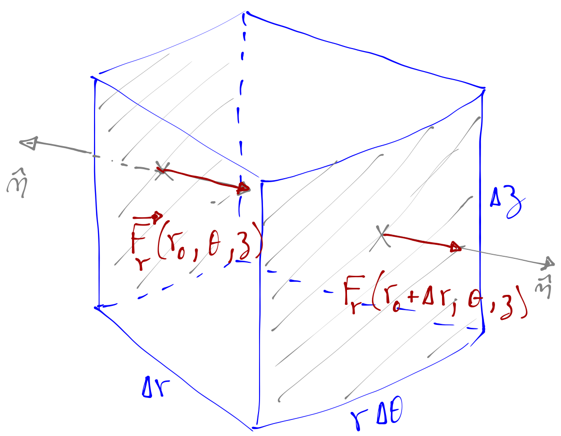




$$\Delta V = (r\Delta\theta)(\Delta r)(\Delta z)$$

$$\Rightarrow dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Cálculo do fluxo através das faces radiais.



$$\phi_{r_0} = - F_r(r_0, \theta, z) \cdot r\,\Delta\theta\,\Delta z$$

$$\phi_{r_0+\Delta r} = - \left\{ \phi_{r_0} + \frac{\partial \phi_{r_0}}{\partial r} \cdot \Delta r \right\}$$

Analisar o sinal; "Como exercício conceitual".

$$\phi_r = \phi_{r_0} + \phi_{r_0+\Delta r}$$

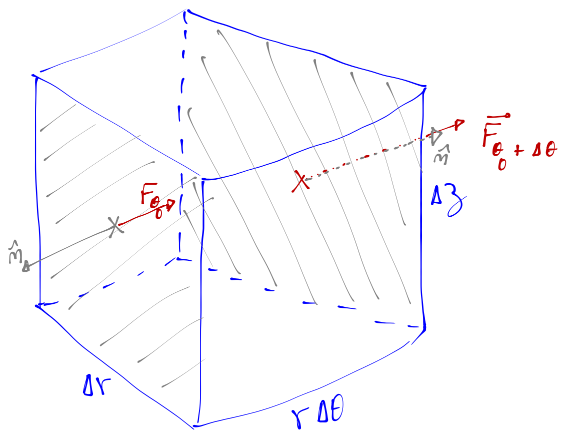
Porque somar?

$$\phi_r = \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \cdot \Delta r = \frac{\partial}{\partial r}\left(F_r\, r\, \Delta\theta\, \Delta z \right) \cdot \Delta r$$

O fluxo total pelas faces radiais é $\quad \phi_r = \phi_{r_0} + \phi_{r_0+\Delta r}$

$$\boxed{\phi_r = \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial}{\partial r}\left(r F_r\right)}$$

Fluxo em $\underline{\theta}$.



De forma similar:

$$\phi_\theta = \phi_{\theta_0} + \phi_{\theta_0+\Delta\theta}$$

$$\phi_{\theta+\Delta\theta} = -\left\{ \phi_{\theta_0} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\phi_{\theta_0}\right) \cdot \Delta\theta \right\}$$

$$\phi_\theta = \cancel{\phi_{\theta_0}} - \cancel{\phi_{\theta_0}} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\phi_{\theta_0}\right) \cdot \Delta\theta$$

$$\Longrightarrow \phi_{\theta_0} = -F_\theta \Delta r \Delta z$$

$$\Longrightarrow \phi_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta \Delta r \Delta z\right) \cdot \Delta\theta = \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$$

$\longrightarrow$ Seguindo o mesmo raciocínio para z

$$\phi_z = \phi_{z_0} + \phi_{z_0+\Delta z}$$

$$\phi_{z_0+\Delta z} = -\left\{ \phi_{z_0} + \frac{\partial \phi_{z_0}}{\partial z} \cdot \Delta z \right\} \quad ; \text{ mas } \phi_{z_0} = -F_z \Delta r \cdot r\Delta\theta$$

$$\Longrightarrow \phi_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(F_z r \Delta r \Delta\theta\right) \cdot \Delta r$$

$$\Longrightarrow \phi_z = r \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Portanto, o fluxo total é

$$\phi = \phi_r + \phi_\theta + \phi_z$$

$$\phi = \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial}{\partial r}\left(r F_r\right) + \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta\right) + r \Delta r \Delta\theta \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\left(F_z\right)$$

Queremos $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \underbrace{\oint_V \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA}_{\text{este é o fluxo } \phi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{r \cancel{\Delta r \Delta\theta \Delta z}} \left(\cancel{\Delta r \Delta\theta \Delta z} \frac{\partial}{\partial r}\left(r F_r\right) + \cancel{\Delta r \Delta\theta \Delta z} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta\right) + r \cancel{\Delta r \Delta\theta \Delta z} \frac{\partial}{\partial z}\left(F_z\right) \right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r F_r\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(F_z\right)}$$

Voltando à origem do problema:

Queremos $\nabla^2 V$ em coordenadas cilíndricas.

Se assumirmos que a função escalar $\underline{V}$ está associada a uma função vetorial $\vec{E}$, tal que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

"Como é o caso do campo elétrico junto com o potencial elétrico".

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V\right) = -\nabla^2 V$$

Basta escrevermos $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ e aplicarmos o resultado em

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r E_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(E_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z\right)$$

$V = V(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Obs: $\nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{E}\right)$, para o caso de $V =$ potencial elétrico.

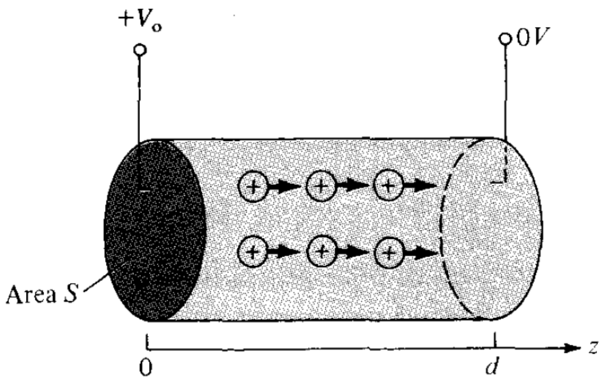
$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \ .$$

Daqui em diante "só" o que temos a fazer é desenvolvermos a habilidade de resolvermos as Equações diferenciais de Laplace e Poissom, nos diferentes geometrias (retangular, esférico, cilíndrico, ...).

Problemas:

Em muitos casos a solução de um problema do tipo $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ (com $\rho = 0$ ou $\rho \neq 0$), não é tão complexo como possa parecer. Vamos discutir um problema envolvendo $\rho \neq 0$.

Condutores de correntes em fontes de alta voltagem devem ser resfriados a fim de se diminuir as perdas de energia por efeito Joule. Uma forma de bombeamento é baseada na força transmitida ao fluido refrigerante por cargas em um campo elétrico. Uma bomba eletrodinâmica está ilustrada abaixo.



A região entre os eletrodos contém uma densidade de carga uniforme ρ_0, gerada pelo eletrodo esquerdo e coletada pelo direito. Calcular a pressão da bomba se $\rho_0 = 25 \times 10^{-3}\ C/m^3$ e $V_0 = 22\ kV$.

$\Rightarrow$ Queremos a pressão na superfície direita.

$$P = \frac{F}{A}.$$

{ A força é dada pela força total que empurra todas as cargas dentro do volume $V = S.d$ sobre a superfície $\underline{S}$.

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_V \rho \vec{E}\, dv \quad , \text{ onde } \rho_V \vec{E}\, dv = dq \vec{E} = d\vec{F}$$

$*$ Precisamos de $\vec{E}$.

Desde que $\rho \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\rho_0/\epsilon_0$

Se optarmos pelas coordenadas cilíndricas, de forma geral:

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho_0/\epsilon$$

Se posicionarmos o eixo $\underline{z}$ colinearmente com o eixo central da bomba cilíndrica:

$$\nabla^2 V = -\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\left(E_z \hat{n}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}E_z$$

Como $E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$ $\Rightarrow$ $\nabla^2 V = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}V$

"Só pussui o termo em z."

Então $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho_0/\epsilon$.

Como $\underline{V}$ só depende de z.

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon}$$

De imediato percebe-se (similar à cinemática com a = cte) que

$$V(z) = V(z)\Big|_{z=0} + V'(z)\Big|_{z=0} z - \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\epsilon}z^2 \qquad \text{Obs: } V''(z)\Big|_{z=0} = -\rho_0/\epsilon$$

Aplicando as condições de contorno:

$$V(z)\Big|_{z=0} = V_0$$

$$V(z)\Big|_{z=d} = 0 \quad \Rightarrow 0 = V_0 + V'(z).\,d - \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\epsilon}d^2$$

$$\Rightarrow V'(z) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_0 d^2}{\epsilon} - V_0\right)$$

$$\Rightarrow V(z) = V_0 + \left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right) z - \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\epsilon} z^2$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{\epsilon} z\right)\hat{k}$$

$$\vec{E} = \left[\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{\epsilon}\left(z - \frac{d}{2}\right)\right]\hat{k}$$

Força

$$\vec{F} = \int_V \rho_0 \vec{E}\, dV \qquad dV = S\, dz$$

$$\vec{F} = \int_0^d \rho_0 \vec{E}\, S\, dz = \rho_0 S \int_0^d \vec{E}\, dz$$

$$\vec{F} = \rho_0 S \int_0^d \left(\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0 z}{\epsilon} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon}\right) dz\, \hat{k}$$

$$\vec{F} = \rho_0 S \left[\frac{V_0 z}{d} + \frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} z\right]_0^d \hat{k}$$

$$\vec{F} = \rho_0 S \left(V_0 + \cancel{\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon}} - \cancel{\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon}}\right)\hat{k}$$

$$\vec{F} = \rho_0 S V_0 \hat{k}$$

Pressão

$$P = \frac{F}{S} = \rho_0 V_0 = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^{3} \ \frac{C}{m^3} \cdot \frac{J}{C}$$

$\frac{C}{m^3}$ → densidade de cargas

$\frac{J}{C}$ → Potencial = $\frac{\text{energia}}{\text{carga}}$.

$$P = 550\ J/m^3$$

Analisar as unidades. $[J] = [F \times \Delta S] = [N \cdot m]$

$$\Rightarrow P = 550\ \frac{N\, \cancel{m}}{m^{\cancel{3}\, 2}}$$

$$\boxed{P = 550\ N/m^2}$$

Exercício: Em um reservatório de carga unidimensional a densidade de carga é $\frac{\rho_0}{a} \cdot x$. Se $\vec{E} = \vec{0}$ em $x = 0$ e $V = 0$ em $x = a$, ache $\underline{V}$ e $\underline{\vec{E}}$.

Resposta: $\frac{\rho_0}{6\varepsilon a}\left(a^3 - x^3\right)$, $\frac{\rho_0 x^2}{2a\varepsilon}\hat{x}$

Vimos, através de alguns exemplos específicos, aplicações e interpretações das Equações de Laplace e de Poisson. Vamos agora agora a uma abordagem mais geral.

Análise de $\nabla^2 V = 0$ em coordenadas retangulares.

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

Sabe-se que se há uma solução $V(x,y,z)$ que satisfaça a relação acima, juntamente com as condições de contorno, então esta solução é única.

Demonstração.

Uma forma para se demonstrar uma afirmação é de colocá-la em prática e verificar o resultado. "Não quer dizer que seja sempre uma tarefa simples do ponto de vista intuitivo".

$\Rightarrow$ Se duas soluções para $\underline{V}$ só podem diferir de uma constante, então vamos supor duas que $\underline{V_1}$ e $\underline{V_2}$ são soluções de $\nabla^2 V = 0$, possuindo mesmas condições de contorno.

$\Rightarrow$ Como trata-se de uma equação linear de suas soluções:

Quer dizer: Se $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ são soluções, então

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad , \nabla^2 V_2 = 0 \quad , \nabla^2 V_3 = 0 \quad \ldots \quad \nabla^2 V_n = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V_1 + \nabla^2 V_2 + \nabla^2 V_3 + \ldots + \nabla^2 V_n = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = 0$$ "derivada da soma"...

Vamos então supor que V_1 e V_2 são soluções com mesmas condições de contorno, aplicar $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ e verifiar se $V_1 - V_2 = cte$ é solução como o Teorema afirma.

Se $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$, vamos definir $V^* = V_1 - V_2$

$\Rightarrow \nabla^2 V^* = 0$

Vamos impor que $V^* = 0$ na região de contorno.

Neste ponto vem um passo um tanto abstrato; vamos definir um velor $\vec{A}$, tal que

$$\underline{\underline{\vec{A} = V^* \vec{\nabla} V^*}}$$

Esta definição é adequada porque existe uma identidade vetorial que leva ao gradiente de V^* como segue:

Vimos nos estudos das identidades vetoriais que

(6) $\vec{\nabla}\cdot(\psi \vec{F}) = \psi \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\psi$

No caso $\vec{F} = \vec{\nabla}\psi$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\psi) = \psi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi$

ou $\vec{\nabla}\cdot(V^*\vec{\nabla}V^*) = V^*\nabla^2 V^* + \vec{\nabla}V^*\cdot\vec{\nabla}V^*$

Mas pelo teorema de Gauss

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

"$d\vec{S}$ = elemento de área".

Para $\vec{A} = V^*\vec{\nabla}V^*$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot(V^*\vec{\nabla}V^*)\, dV = \underbrace{\int_S V^*\vec{\nabla}V^*\, d\vec{S}}$$

$\rightarrow$ pela condição de contorno posta $\Rightarrow V^* = 0$ na superfície, então esta integral é nula.

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\left(V^*\vec{\nabla}V^*\right) dV = 0$$

Usando a identidade $\vec{\nabla}\cdot\left(V^*\vec{\nabla}V^*\right) = V^*\nabla^2 V^* + \vec{\nabla}V^*\cdot\vec{\nabla}V^*$

$$\Rightarrow \int_V \left(V^*\nabla^2 V^* + \vec{\nabla}V^*\cdot\vec{\nabla}V^*\right) dV = 0$$

Mas fora das superfícies de contorno $\nabla^2 V^* = 0$, então

$$\int_V \left(\vec{\nabla}V^*\cdot\vec{\nabla}V^*\right) dV = 0$$

Só se $\vec{\nabla}V^*\cdot\vec{\nabla}V^* = 0$

ou de um vetor por si próprio.

O produto escalar de dois vetores iguais só é zero se o vetor for nulo.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}V^* = 0 \quad ;$$

O gradiente (taxa de variação) de uma função escalar só é zero se a função for uma constante

$\Rightarrow$ $V^* = cte$ em qualquer ponto de V.

$\Rightarrow$ $V_1 - V_2 = cte$ em qualquer ponto de V.

Mas $\nabla^2 V_1 = 0$ e $\nabla^2 V_2 = 0$, além disso $V_1 = V_2$ nas regiões de contorno

$\Rightarrow$ $V_1 - V_2 = cte$ em qualquer ponto e

$V_1 = V_2$ no contorno.

$\Rightarrow$ $cte = 0$

$V_1 = V_2$ em qualquer ponto, mostrando que só existe uma solução para $\nabla^2 V$ capaz de satisfazer as mesmas condições de contorno.

Voltando à abordagem inicial:

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

$V(x,y,z)$ é única. Sendo assim, podemos propor uma forma qualquer para $V(x,y,z)$ e então tentarmos resolver a equação com $V(x,y,z)$ neste formato particular, se conseguirmos resolver a equação então, como a solução é única, é ela mesma.

A fim de transformar-se a forma complexa acima, envolvendo três variáveis independentes, em três equações, cada uma envolvendo uma única variável independente, supõe-se a seguinte forma para $V(x,y,z)$:

$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (XYZ)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(XYZ) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(XYZ) = 0$$

$$YZ\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + XZ\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + XY\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Separando o termo que depende apenas de $\underline{x}$.

Dividindo todos por XYZ

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

Esta igualdade só é verdadeira para quaisquer valores de x, y e z se cada lado for constante.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Cte_1 & (1) \\[2ex] -\dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_1 & (2) \end{cases}$$

A equação (1) depende apenas de x. Separar a equação (2).

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) = cte_1$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = ct_1 + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z)$$

De forma similar, cada lado é igual a uma constante.

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = Cte_2$$

$$ct_1 + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) = Cte_2 \implies \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_2 - cte_1$$

Portanto "temos" que resolver

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Cte_1 & (1)^* \\[2ex] \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -Cte_2 & (2)^* \\[2ex] \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = cte_2 - cte_1 & (3)^* \end{cases}$$

Soluções:

(1) $$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Cte_1 \xrightarrow{\text{como } X \text{ depende só de } x} \frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = Cte_1$$

$$\implies \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = cte_1 X(x)$$

$$\implies X(x) \propto e^{\alpha x} \implies \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}$$