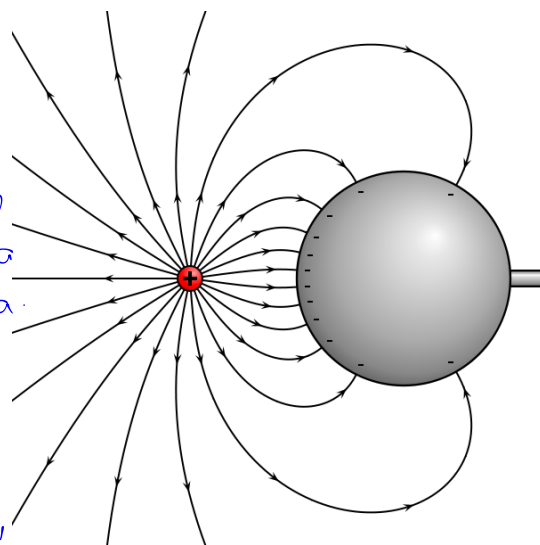


Carga pontual nas proximidades de uma esfera condutora.

Tal como está ilustrado na Fig. ao lado, as linhas de campo chegam perpendicularmente à superfície da esfera, zerando na região interna.



⇒ Desde que a esfera condutora tenha suprimento de cargas tal que, após atingir a estabilidade eletrostática não haja cargas tensionadas nas extremidades das esferas, então podemos garantir que o potencial na esfera não é alterado durante o processo de aproximação da carga externa.

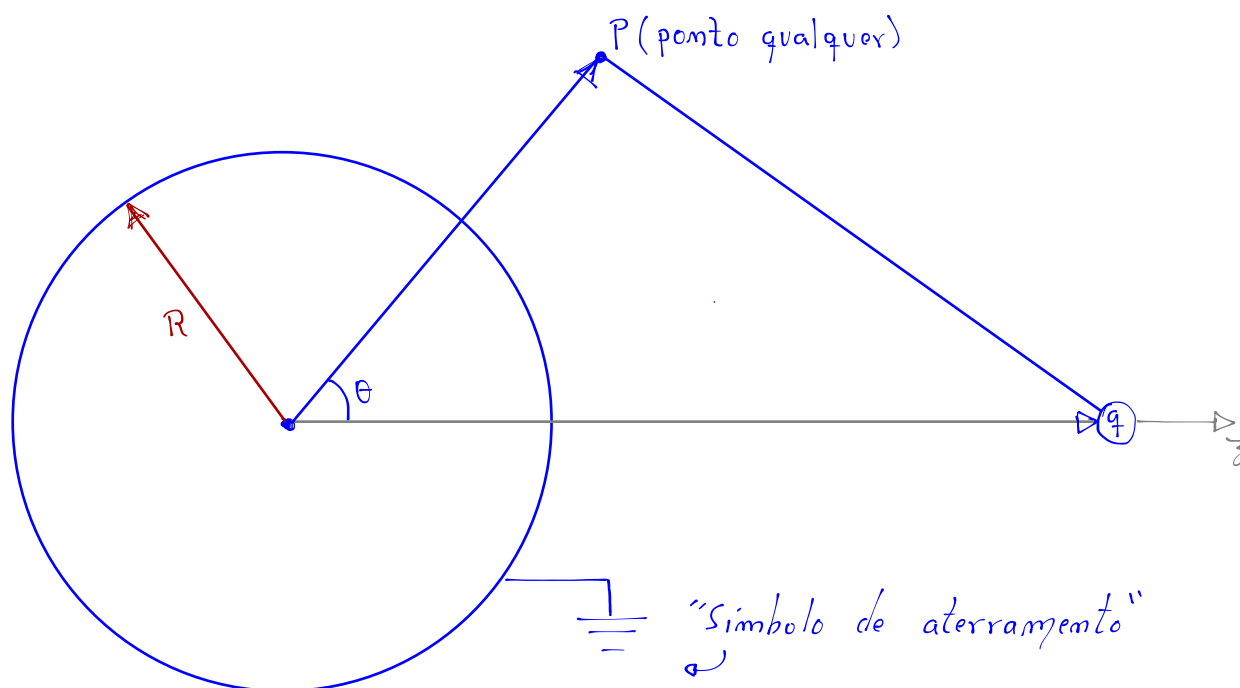
Obs: Não haverá cargas tensionadas se a esfera estiver aterrada. Isto garante que o fluxo de cargas, devido ao campo proveniente da carga aproximada, seja livre mantendo $\Delta V = 0$.

⇒ Se considerarmos que $V(r=\infty) = 0$ (definirmos isso), então:

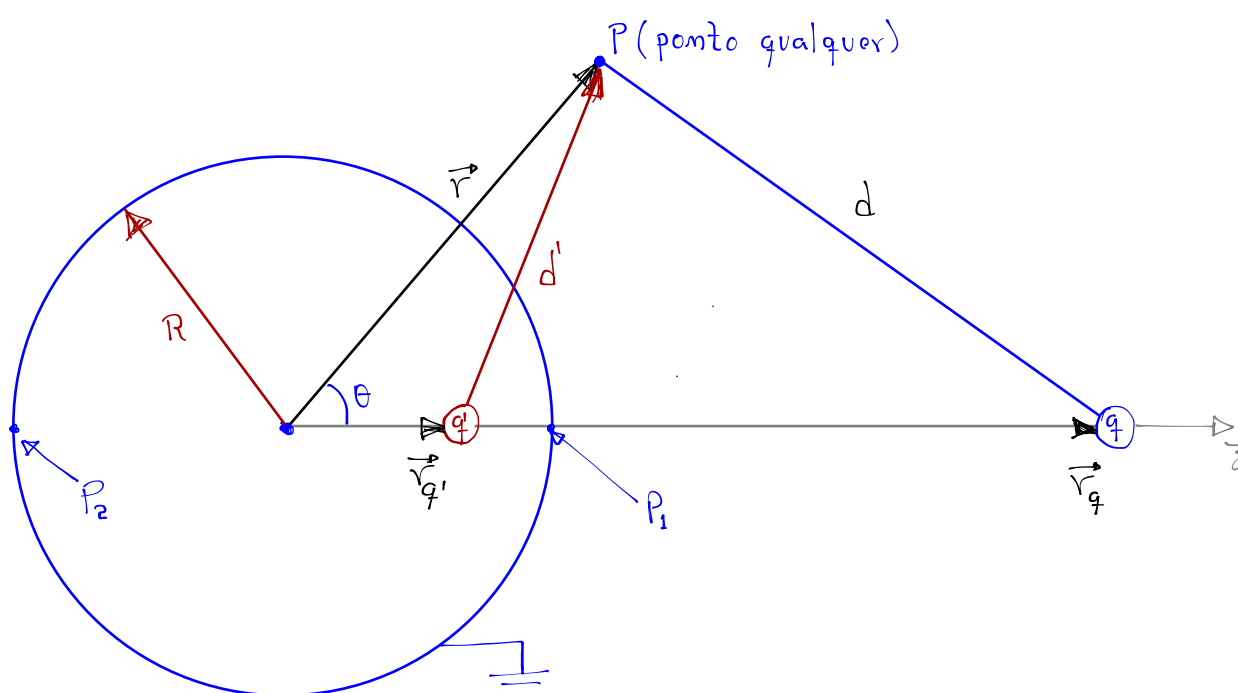
- (1) Antes da aproximação da carga o campo elétrico é zero em todo o espaço que circunda a esfera condutora. Então o potencial é constante em todo o espaço.
⇒ Significa que se o potencial é zero no "infinito", então é zero na esfera também (é zero em qualquer ponto do espaço).

- (2) À medida que aproximamos a carga q da esfera, as cargas internas se organizam de forma a anular o campo elétrico interno na esfera condutora. Este processo faz a "tensão" interna na esfera aumentar, afinal, tirando a carga externa ⇒ as cargas internas tendem a voltarem para sua configuração original. Contudo, se o condutor estiver aterrado, o potencial permanecerá inalterado durante todo o processo.
⇒ Se a esfera estiver aterrada, podemos utilizar a condição de contorno $V(r=R) = 0$; onde R é o raio da esfera condutora.

⇒ Devemos tentar posicionar cargas pontuais no interior do condutor de forma a produzir as mesmas condições de contorno da distribuição de cargas na superfície do condutor.



⇒ Queremos obter o potencial no ponto P . Para isso vamos posicionar uma carga q' no interior do condutor. Pela simetria do problema podemos inferir que q' deve ser posicionada em algum ponto sobre o eixo z .



⇒ Se existir a possibilidade de substituírmos a esfera por uma carga q' (imaginária) então o potencial (que só faz sentido fora da esfera) é:

$$V(\vec{r}) = V_q + V_{q'}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{d} + \frac{q'}{d'} \right)$$

⇒ Precisamos encontrar a posição e a intensidade ($r_{q'}$ e q') capaz de reproduzir as mesmas condições de contorno.

Em coordenadas esféricas:

$$d = \sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta)}$$

$$d' = \sqrt{r^2 + r_{q'}^2 - 2rr_{q'} \cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta)}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + r_{q'}^2 - 2rr_{q'} \cos(\theta)}} \right)$$

Usando $V(r=R) = 0$

$$\Rightarrow \frac{q}{\sqrt{R^2 + r_q^2 - 2Rr_q \cos(\theta)}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + r_{q'}^2 - 2Rr_{q'} \cos(\theta)}} = 0$$

Por simplicidade, vamos aplicar o resultado acima em dois pontos estratégicos; P_1 e P_2

Em P_1 : $\Rightarrow \theta = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 + r_q^2 - 2Rr_q \cos(\theta)} = (R^2 + r_q^2 - 2Rr_q)^{1/2} = [(R - r_q)^2]^{1/2} = \underbrace{r_q - R}$$

⇒ O que fica óbvio ao olharmos para a figura.

Ordem invertida pois $r_q > R$.

De forma similar:

$$\sqrt{R^2 + r_{q'}^2 - 2Rr_{q'}\cos(\theta)} = \overbrace{(R - r_{q'})}^{\text{Neste caso } R > r_{q'}}$$

Então, para o ponto P_1 temos:

$$\frac{q}{(r_q - R)} + \frac{q'}{(R - r_{q'})} = 0 \quad \text{Eq. (1)}$$

De forma similar, para o ponto P_2 :

$$\theta = 180^\circ \implies \cos(180^\circ) = -1$$

$$\sqrt{R^2 + r_q^2 - 2Rr_q\cos(\theta)} = (R^2 + r_q^2 + 2Rr_q)^{\frac{1}{2}} = [(R + r_q)^2]^{\frac{1}{2}} = (R + r_q)$$

$$\text{e } \sqrt{R^2 + r_{q'}^2 - 2Rr_{q'}\cos(\theta)} = (R + r_{q'})$$

Então para o ponto P_2 :

$$\frac{q}{(R + r_q)} + \frac{q'}{(R + r_{q'})} = 0 \quad \text{Eq. (2)}$$

Juntando Eqs. (1) e (2):

$$\begin{cases} \frac{q}{(r_q - R)} + \frac{q'}{(R - r_{q'})} = 0 & \text{Eq. (1)} \\ \frac{q}{(R + r_q)} + \frac{q'}{(R + r_{q'})} = 0 & \text{Eq. (2)} \end{cases}$$

$\implies$ Isolando q' em (1):

$$q' = -\frac{(R - r_{q'})}{(r_q - R)} q \quad \text{Eq. (3)}$$

⇒ Isolando q' em (2)

$$q' = - \frac{(R + r_{q'})}{(R + r_q)} q \quad \text{Eq. (4)}$$

Comparando Eqs. (3) e (4):

$$\Rightarrow \frac{R - r_{q'}}{r_q - R} = \frac{R + r_{q'}}{R + r_q}$$

$$(R - r_{q'})(R + r_q) = (r_q - R)(R + r_{q'})$$

$$R^2 + \cancel{Rr_q} - \cancel{r_{q'}R} - r_{q'}r_q = \cancel{r_qR} + r_q r_{q'} - R^2 - \cancel{Rr_{q'}}$$

$$2r_q r_{q'} = 2R^2$$

$$\Rightarrow r_{q'} = \frac{R^2}{r_q}$$

"A carga imagem deve ser colocada nesta posição"

⇒ Este resultado em uma das equações, digamos Eq. (3).

$$\Rightarrow q' = - \frac{(R - r_{q'})}{(r_q - R)} q$$

$$q' = - \frac{(R - R^2/r_q)}{r_q - R} q$$

Simplificando:

$$q' = - \frac{R}{r_q} \frac{(\cancel{r_q} - R)}{(\cancel{r_q} - R)} q$$

$$q' = - \frac{R}{r_q} q$$

Este deve ser o valor da carga imagem.

{ Análise: Significa que com esses valores para r_q e q' , garantimos a condição de contorno $V(r=R)=0$.

$\Rightarrow$ Notar que se $R \rightarrow \infty$ a esfera passa a representar um plano, logo:

$$q' = - \frac{R}{r_q} q$$

$\Rightarrow$ Como necessariamente $r_q > R$, pois q deve estar fora do condutor:

$\Rightarrow$ se $R \rightarrow \infty$; $r_q \rightarrow \infty$ também. Então

$q' \simeq -q$, como deve ser no caso plano.

Adicionalmente, usando a equação original:

$$\Rightarrow \frac{q}{\sqrt{R^2 + r_q^2 - 2Rr_q \cos(\theta)}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + r_{q'}^2 - 2Rr_{q'} \cos(\theta)}} = 0$$

$\Rightarrow$ fazendo $q' = -q$

$$\Rightarrow |R - r_q| = |R - r_{q'}|$$

Como $r_q > R$ e $R > r_{q'}$

Então podemos abandonar os símbolos de módulo se ordenarmos $r_q - R$ e $R - r_{q'}$

$$\Rightarrow r_q - R = R - r_{q'}$$

$\rightarrow$ representa o caso plano ($R \rightarrow \infty$); "igualdade das distâncias relativamente à face do condutor.

Voltando ao problema da esfera

$$\Rightarrow \text{Temos que: } \begin{cases} r_q' = \frac{R^2}{r_q} \\ q' = -\frac{R}{r_q} q \end{cases}$$

Estes resultados em $V(r, \theta, \varphi)$:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta)}} - \frac{R^q/r_q}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_q^2} - 2r\frac{R^2}{r_q} \cos(\theta)}} \right)$$

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta)}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{rr_q}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)}} \right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(r, \theta)$$

$$\vec{E} = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta)$$

Derivando cada termo separadamente:

$$\frac{4\pi\epsilon}{q} \frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right)^{-1/2} - \left[\left(\frac{rr_q}{R} \right)^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right]^{-1/2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon}{q} \frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) &= -\frac{1}{2} \left(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right)^{-3/2} \cdot (2r - 2r_q \cos(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{rr_q}{R} \right)^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right]^{-3/2} \cdot \left(2 \frac{r_q^2}{R^2} r - 2r_q \cos(\theta) \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{4\pi\epsilon}{q} \frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) = \frac{r - r_q \cos(\theta)}{\left(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right)^{3/2}} - \frac{\left(r_q/R \right)^2 r - r_q \cos(\theta)}{\left[\left(\frac{rr_q}{R} \right)^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-r + r_q \cos(\theta)}{(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{3/2}} - \frac{-\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r + r_q \cos(\theta)}{\left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)\right]^{3/2}} \right]$$



$$\frac{4\pi\epsilon}{q} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{-1/2} - \left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta) \right]^{-1/2} \right\}$$

$$\frac{4\pi\epsilon}{q} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{2rr_q \sin(\theta)}{(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{2rr_q \sin(\theta)}{\left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{rr_q \sin(\theta)}{(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{3/2}} + \frac{rr_q \sin(\theta)}{\left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)\right]^{3/2}} \right]$$

.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{r - r_q \cos(\theta)}{(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{3/2}} - \frac{\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r - r_q \cos(\theta)}{\left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)\right]^{3/2}} \right] \hat{r} \\ + \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{r_q \sin(\theta)}{(r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos(\theta))^{3/2}} - \frac{r_q \sin(\theta)}{\left[\left(\frac{r_q}{R}\right)^2 r^2 + R^2 - 2rr_q \cos(\theta)\right]^{3/2}} \right] \hat{\theta}$$

$$\sigma = -\epsilon \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon E(r, \theta) \Big|_{r=R}$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{R - r_q \cos(\theta)}{(R^2 + r_q^2 - 2Rr_q \cos(\theta))^{3/2}} - \frac{\frac{r_q^2}{R} - r_q \cos(\theta)}{\left[\frac{r_q^2}{R} + R^2 - 2Rr_q \cos(\theta) \right]^{3/2}} \right]$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{R - \cancel{r_q \cos(\theta)} - \cancel{r_q^2/R} + \cancel{r_q \cos(\theta)}}{[r_q^2 + R^2 - 2Rr_q \cos(\theta)]^{3/2}} \right\}$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R} \frac{R^2 - r_q^2}{[r_q^2 + R^2 - 2Rr_q \cos(\theta)]^{3/2}}$$

Como $r_q > R \implies \sigma < 0$ se $q > 0$ e

$\sigma > 0$ se $q < 0$.

"Campo esperado"