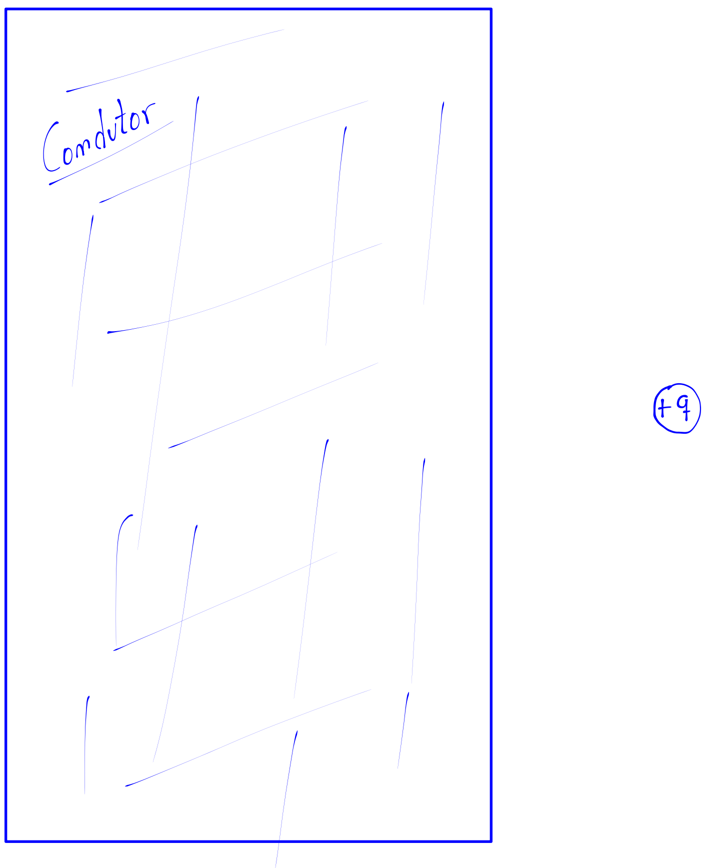
Imagens eletrostáticas

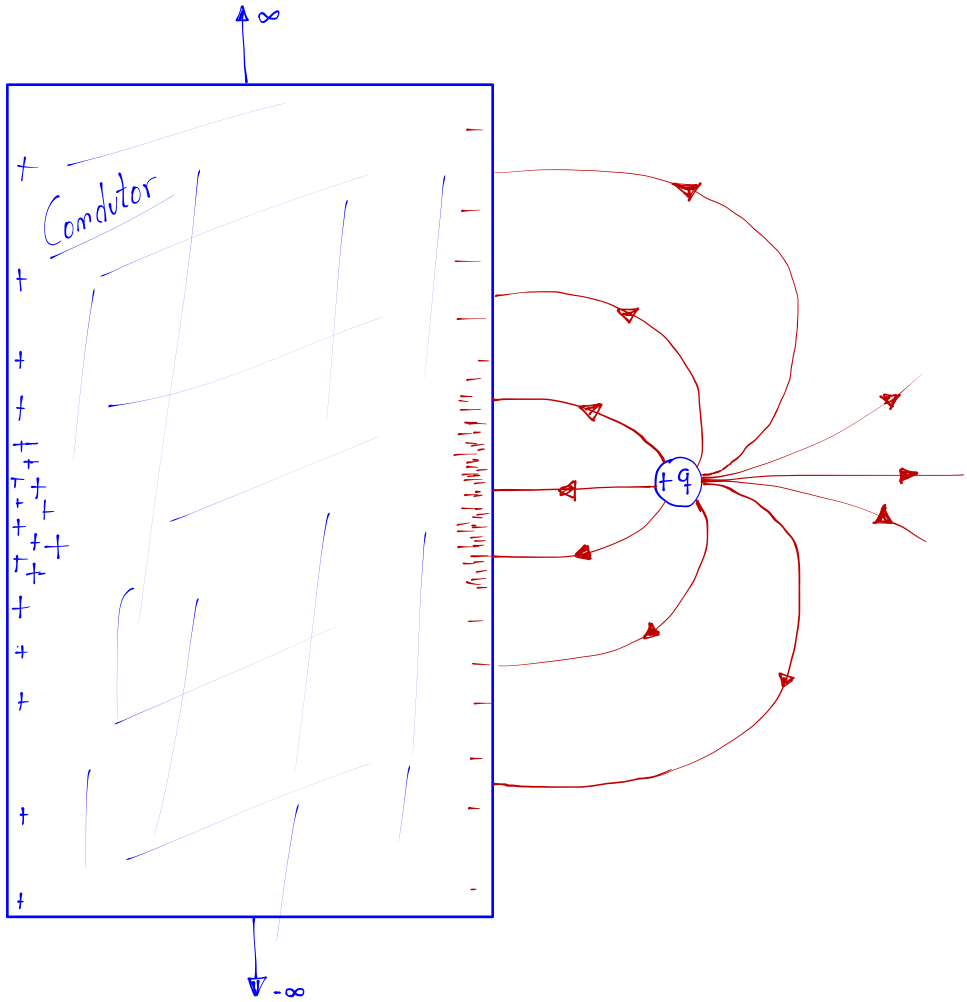
Vamos iniciar este tópico tentando construir alguma intuição sobre este método de obtenção de potenciais quando cargas são posicionadas nas proximidades de um condutor.

Vamos considerar a situação mais simples; a de uma carga q posicionada a uma distância $\underline{d}$ de um condutor plano infinito.



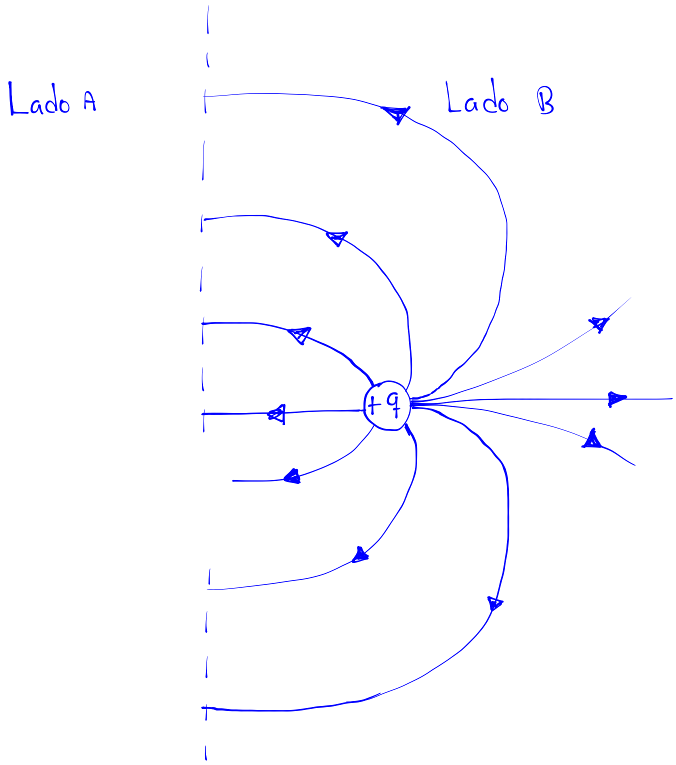
$\Rightarrow$ As cargas no condutor se arranjam de forma o campo elétrico dentro do condutor seja nulo, fazendo com que o campo elétrico nas proximidades da superfície do condutor seja perpendicula à superfície.

$\Rightarrow$ Então as linhas de campo elétrico na região externa ao condutor deve assumir a forma ilustrada abaixo.

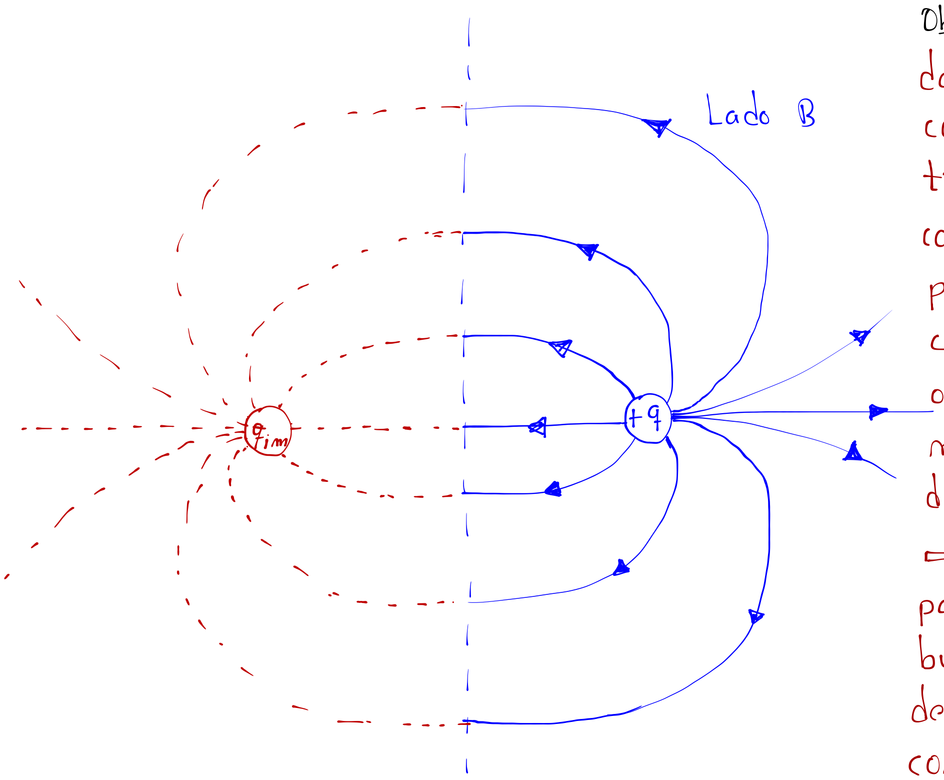


O que se faz é tentar substituir o condutor por uma carga imaginária ($q_{imag.}$) que se colocada próxima da carga real q, produziria a mesma configuração de campo elétrico.

Vamos então "retirar" o condutor e delimitar a superfície por uma linha pontilhada



Ao tentarmos imaginar que carga em e que posição deveríamos posicionar uma carga $q_{imag.}$ capaz de produzir o campo elétrico acima, inevitavelmente, utilizando argumentos de simetria (As linhas de campo "atravessariam" a linha pontilhada de forma perpendicular e mantendo suas curvatura), somos levados em

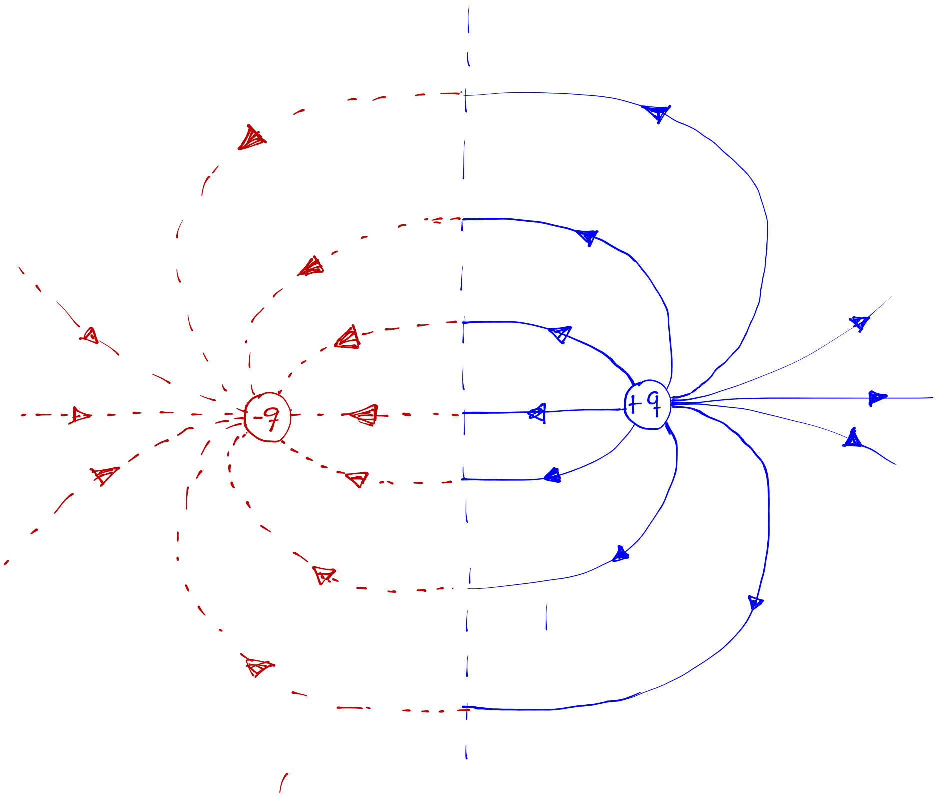


Obs: Como a solução, dadas as condições de contorno, é única; então se na parede o campo elétrico é perpendicular à superfície ⟹ não existe outra solução para uma mesma configuração de campo elétrico.
⟹ Se substituirmos a parede por uma distribuição de carga capaz de produzir as mesmas condições de contorno, então a solução é a mesma.

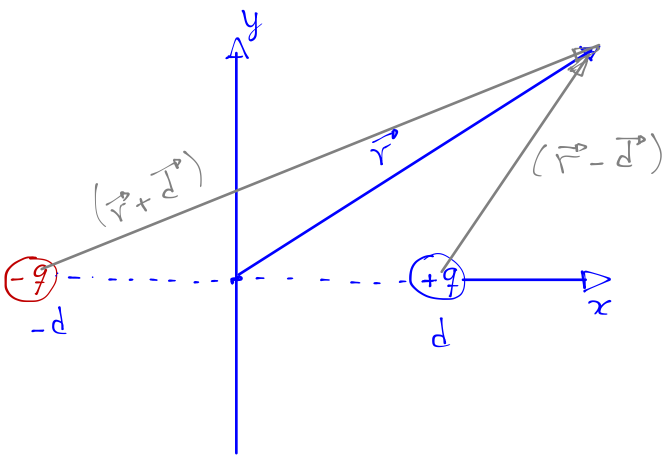
⟹ Note que: (1) A carga imaginária deve ter sinal inverso ao sinal da carga real.

(2) A carga imaginária deve ter (nesse caso particular de um condutor plano infinito) mesma intensidade que a carga real; caso contrário as linhas não passariam pelo traço pontilhado perpendicularmente.

(3) A reta tracejada deve estar no ponto médio entre as cargas, ou seja, a carga imaginária deve ser posicionada a uma distância <u>d</u> da reta tracejada.



⇒ O potencial pode ser calculado par as cargas como segue:



$$V_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|}$$

$$V_{-q} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{|\vec{r}+\vec{d}|}$$

Onde $|\vec{r}-\vec{d}| = \left|(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) - (d\hat{\imath})\right|$

$$|\vec{r}-\vec{d}| = |(x-d)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}|$$

$$|\vec{r}-\vec{d}| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

$\Rightarrow$ Similarmente:

$$|\vec{r}+\vec{d}| = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right)}$$

Com o potencial em mãos podemos obter o campo elétrico

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Por partes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}\cdot 2(x-d)$$

$$= -\frac{(x-d)}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{y}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{z}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

De forma similar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{y}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} = -\frac{z}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/}}$$

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(-\frac{(x-d)}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}+\frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{\imath}\right.$$

$$+\left(-\frac{y}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}+\frac{y}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

$$\left.+\left(-\frac{z}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}+\frac{z}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{k}\right\}$$

$\Rightarrow$ A densidade superficial de carga é:

$$\sigma = \epsilon E\Big|_{x=0}$$

"Note que as componentes E_y e E_z são zero quando $x=0$"

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{\epsilon q}{4\pi\epsilon}\left\{\frac{2d}{\left[d^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\boxed{\sigma(y,z) = -\frac{qd}{2\pi\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}}$$

Note que a densidade de carga é negativa. Fica evidente que a carga positiva é atraída para a superfície.

$\Rightarrow$ A força de atração pode ser obtida imaginado que a carga positiva é atraída pela carga negativa:

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon(2d)^2}\hat{\imath}$$

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi d^2}\hat{\imath}$$

Podemos considerar um $\underline{d}$ dinâmico (Soltando a carga q ela é acelerada no sentido do plano) tal que $d \to x$, onde $\underline{x}$ é a posição da carga q.

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{q}{16\pi x^2}\hat{\imath}$$

Podemos obter $\underline{F}$ apartir do potencial gerado pela carga imaginária, como segue:

$\vec{E}_q$ = Campo elétrico sentido por q devido ao potencial gerado pelas cargas induzidas no plano condutor (ou equivalentemente, pela carga imaginária).

$$\vec{E}_q = -\vec{\nabla} V_{q_{im.}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}_q$$

$$\vec{F} = -q\vec{\nabla} V_{q_{im.}}$$

$$V_{q_{im.}} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left[(x+d)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}$$

O potencial na posição da carga q é

$$V_{q_{im.}} = - \frac{q}{4\pi\epsilon\ (x+d)}$$

$$\vec{\nabla} V_{q_{im.}} = - \frac{q}{4\pi\epsilon} (-1)(x+d)^{-2}\ \hat{\imath} = \frac{q}{4\pi\epsilon\ (x+d)^2}\ \hat{\imath}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = - \frac{q}{4\pi\epsilon\ (x+d)^2}\ \hat{\imath}$$

Dando uma força

$$\vec{F} = - q\vec{\nabla} V$$

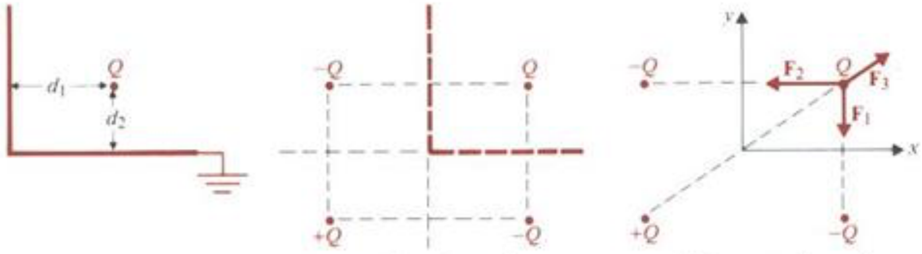
$$\vec{F} = - \frac{q^2}{4\pi (2d)^2}\ \hat{\imath}$$

Fazendo $d \equiv x \equiv$ posição de q.

$$\boxed{\vec{F} = - \frac{q^2}{16\pi x^2}\ \hat{\imath}}$$

Em resumo, o que se faz é considerar os condutores como espelhos, onde as imagens assumem sinais similarmente ao que ocorre com as inversões direita-esquerda em espelhos reais.

Abaixo está ilustrada uma configuração representando uma carga próxima a dois condutores planos perpendiculares.



(a) Physical arrangement. (b) Equivalent image-charge arrangement. (c) Forces on charge Q.

Point charge and perpendicular conducting planes.

Fica como exercício calcular:

(a) $V(x,y,z)$

(b) $\vec{E}(x,y,z)$

(c) σ em cada plano

(d) $\vec{F}$ sobre q.