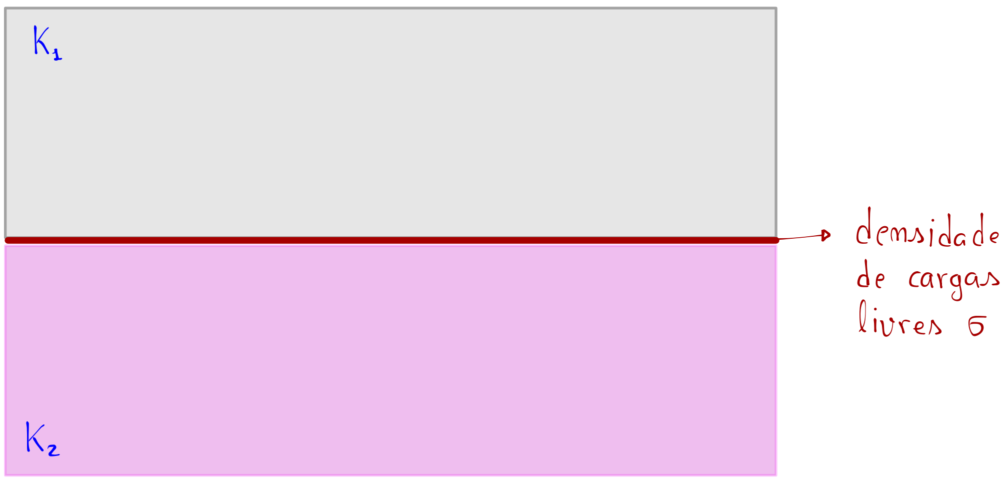
Condições de Contorno para meios dielétricos

Os problemas estudados anteriormente no ambiente vácuo, devem ser repetidos em ambientes dielétricos. É evidente, dos resultados acima, que as condições de contorno (condições nas interfaces entre diferentes dielétricos) são influenciadas pelo efeito de polarização.

Vamos considerar a interface entre dois dielétricos com constantes dielétricas K_1 e K_2. Adicionalmente, vamos considerar que existam cargas livres distribuídas sobre a superfície de interface.

Obs: Cargas livres são cargas adicionadas ao dielétrico, por atrito, por exemplo.

As carga ligadas às molécular polarizada são as "chamadas" cargas ligadas.



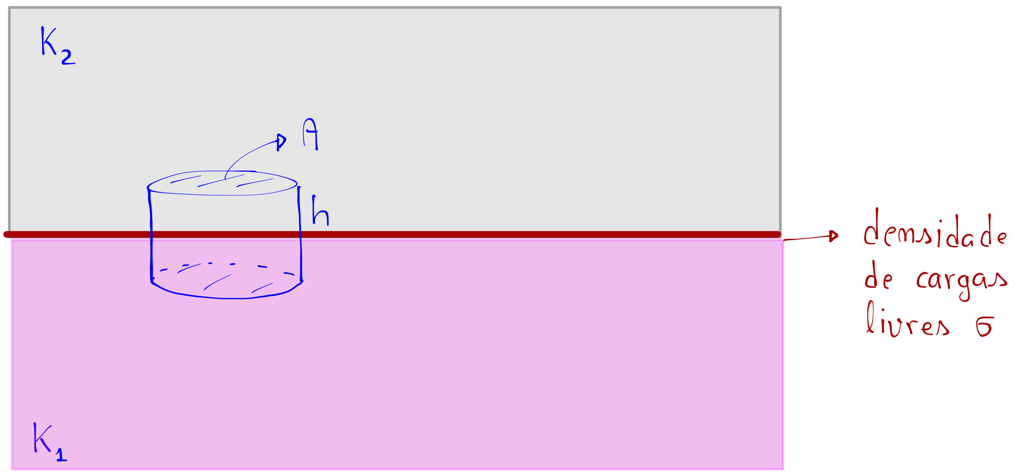
Como vimos, em dielétricos vale $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$, sendo ρ a densidade volumétrica de cargas livres. Portanto,

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \text{Quantidade de cargas livres dentro de } V = Q$$

$\Rightarrow$ Pelo teorema da divergência $\Rightarrow$ $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\, dA = Q$

$\Rightarrow$ o fluxo do vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$ através de uma superfície fechada $\underline{S}$ é igual à carga em excesso no volume delimitado por $\underline{S}$.

Vamos aplicar este resultado a uma superfície Gaussiana que envolve a interface entre os dielétricos:



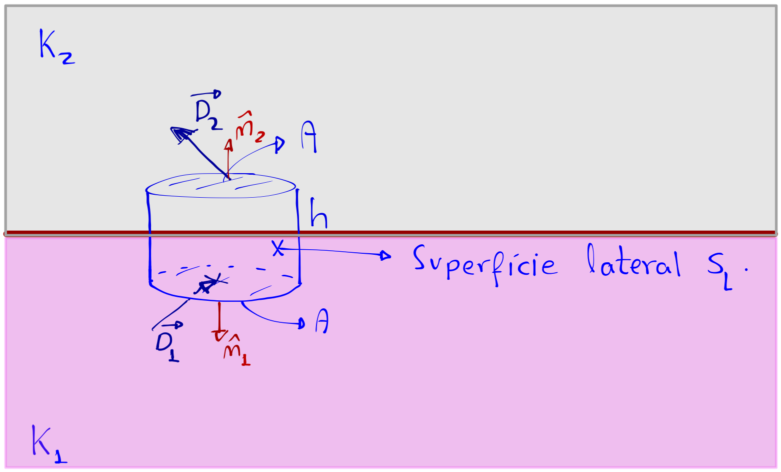
Vamos obter o fluxo Φ_D através da superfície acima.

Importante evidenciar que ao aplicarmos um campo elétrico em dielétricos não há movimento de cargas livres. Então as cargas livres não se rearranjam no sentido de zerar o campo elétrico. Em outras palavras, na região de interface o campo elétrico resultante pode possuir componentes normal e tangencial à superfície de interface; diferente do que ocorre com condutores que próximo à interface o campo elétrico possui apenas componente normal à superfície do condutor.

Obtenção de $\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\, dA = Q$

Na superfície em questão, a carga dentro do volume é

$$Q = \sigma . A$$



O fluxo é $\vec{D}_1 \cdot \hat{m}_1 A + \vec{D}_2 \cdot \hat{m}_2 A + \int_{S_L} \vec{D} \cdot \hat{m}\, dA = \sigma A$

No limite com $h \to 0$ $\quad S_L \to$ zero ; $\int_{S_L} \vec{D} \cdot \hat{m}\, dA \simeq 0$.

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{m}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{m}_2 = \sigma$$

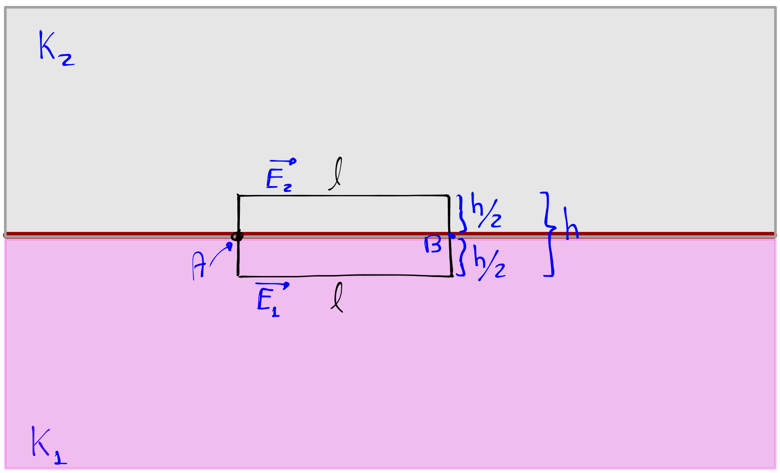
$$\Rightarrow \hat{m}_1 = -\hat{m}_2$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{m}_2 = \sigma$$

Esta expressão equivale à diferença entre as componentes normais (chegando à interface e saindo dela).

$$\boxed{\Rightarrow D_{2m} - D_{1m} = \sigma}$$

Outra condição de contorno pode ser obtida por uma integral de linha como abaixo



Começando do ponto $\underline{A}$ e rodando até voltar em $\underline{A}$:

$$\vec{E}_A \cdot \left(-\frac{h}{2}\hat{j}\right) + \vec{E}_1 \cdot l\hat{\imath} + \vec{E}_B \cdot \left(h\hat{j}\right) + \vec{E}_2 \cdot \left(-l\hat{j}\right) + \vec{E}_A \cdot \left(-\frac{h}{2}\hat{j}\right) = 0$$

Obs: (Campo elétrico) x (distância) = diferença de potencial.

$\Rightarrow$ Como rodamos e voltamos ao mesmo ponto $\Rightarrow$ ddp = 0.

$\Rightarrow$ No limite com $h \to 0$:

$$\vec{E}_1 \cdot l\hat{\imath} + \vec{E}_2 \cdot \left(-l\hat{\imath}\right) = 0$$

$\vec{E}_1 \cdot \hat{\imath} = E_{1_t}$ $\longrightarrow$ Componente tangente do campo elétrico no lado $\underline{1}$ próximo à superfície.

$\vec{E}_2 \cdot \hat{\imath} = E_{2_t}$ $\longrightarrow$ Componente tangente do campo elétrico no lado $\underline{2}$ próximo à superfície.

$$\Rightarrow \quad E_{1_t} - E_{2_t} = 0$$

Resumindo as condições de contorno:

$$\boxed{\begin{array}{l} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ \\ E_{2t} = E_{1t} \end{array}}$$

Problema:

Obter o potencial elétrico e o campo elétrico dentro e fora de uma esfera dielétrica em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{k}$

Fica como "exercício" para os estudantes.

Obs: trata-se de um problema resolvido do Reitz.