

Campo Eletrostático em meio dielétrico

Nesta parte objetivamos tratar do efeito que a aplicação de um campo elétrico causa em materiais não condutores; e também dos efeitos que a reação de um material não condutor pode causar, devido a ação do campo externo, no ambiente ao seu redor.

Em princípio, trata-se de uma tarefa complexa pois um material não condutor (dielétrico) ao ser submetido a um campo elétrico (que necessariamente é produzido por alguma distribuição de carga) sofre um rearranjo molecular (reordenamento de suas cargas), tal que o próprio dielétrico produz um campo adicional no ambiente que o circunda, promovendo reordenação inclusive nas distribuições de cargas responsáveis pelo campo.

Antes de abordarmos o problema sob um ponto de vista mais geral, vamos exemplificar a situação acima através de uma situação "simples":

⇒ Vamos considerar um capacitor $\subseteq$ submetido a uma diferença de potencial V em duas situações: (i) Capacitor de placas paralelas simples (Vácuo entre as placas); (ii) Capacitor com um dielétrico entre suas placas.

Obs: Vs que estiverem familiarizados com este exemplo mais simples podem ir diretamente para a pág. 9 (caso mais geral).

(i)

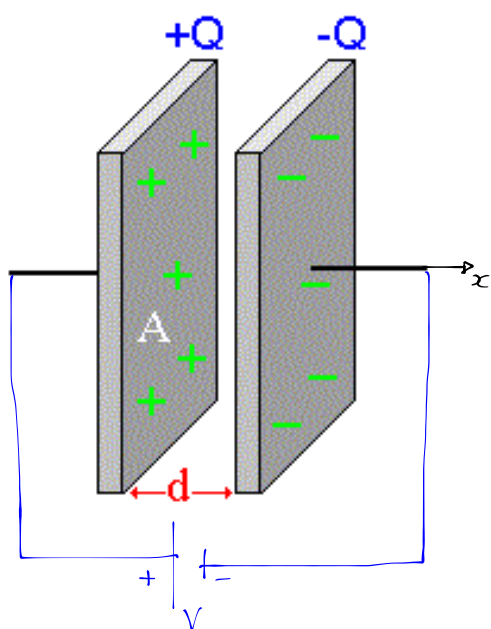
O campo elétrico entre as placas é

$$\vec{E} = \frac{V}{d} \hat{x}$$

Informações adicionais:

$$Q = CV$$

⇒ Energia armazenada = trabalho realizado para armazenar as cargas (tirar de uma placa e levar até a outra).



$\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta R}$. No caso, imaginando que estamos levando cargas positivas de um lado para o outro: $\vec{F} = \vec{E} dq = \frac{V}{d} dq \hat{x}$

Obs: Esta é a força interna do sistema empurrando a quantidade dq de carga que se quer levar para a placa esquerda, de volta para a placa direita. A energia armazenada no sistema é dada pela força externa:

$$\Delta \text{Energia} = \Delta W_{\text{ext.}} = \vec{F}_{\text{ext.}} \cdot \vec{\Delta R}$$

$$\text{Sendo } \vec{F}_{\text{ext.}} = -\frac{V}{d} dq \hat{x}$$

$$\text{e } \vec{\Delta R} = -d \hat{x}$$

$$\Rightarrow d\mathcal{E} = \frac{V}{d} dq \cdot d$$

$$d\mathcal{E} = V dq$$

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^Q V dq$$

Mas V vai aumentando a medida que dq 's vão chegando, logo:

$$q = CV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{q}{C}$$

$$\mathcal{E} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}}$$

ou, como

$$Q = CV$$

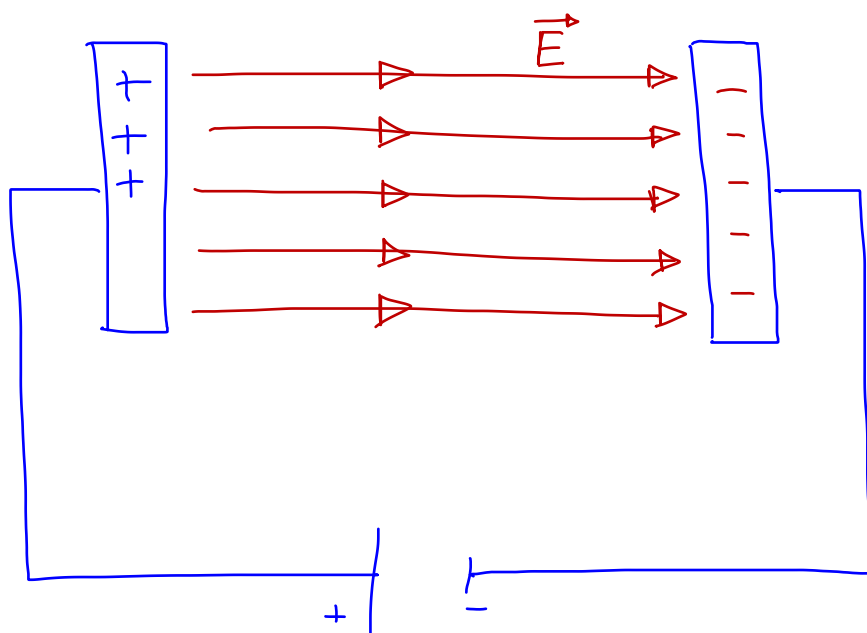
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} CV^2}$$

Adicionalmente:

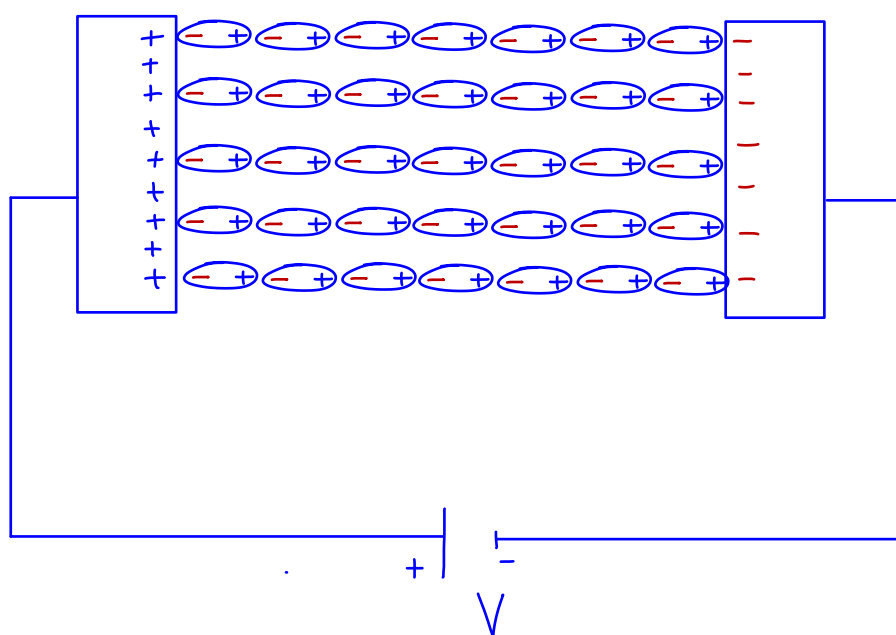
$$\boxed{G = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{V}{d}}$$

Vamos manter V fixo e inserir um dielétrico entre as placas.

Quando inserirmos um dielétrico, as moléculas do dielétrico ficam submetidas ao campo elétrico entre as placas e tendem a alinhar-se com o campo:



Inserindo um dielétrico



Note que cada molécula produz um campo contrário ao que existia antes da inserção do dielétrico. Vamos nos concentrar no campo elétrico entre as placas:

- a) Qual seria o campo elétrico após o dielétrico?
- b) Qual seria a energia armazenada?
- c) " " " densidade de cargas nas placas do condutor?

a) "Obviamente, se V for mantido constante e a distância entre as placas for mantida, então, como $V = Ed$,

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d} \hat{x}, \text{ como antes.}$$



Contudo, existe uma nova situação; um dielétrico eletricamente polarizado entre as placas.

Então, como o campo elétrico proveniente do dielétrico é contrário ao originado pelas placas, a única forma de $\vec{E}$ líquido continuar com o mesmo valor é por um aumento na quantidade de cargas nas placas. Como

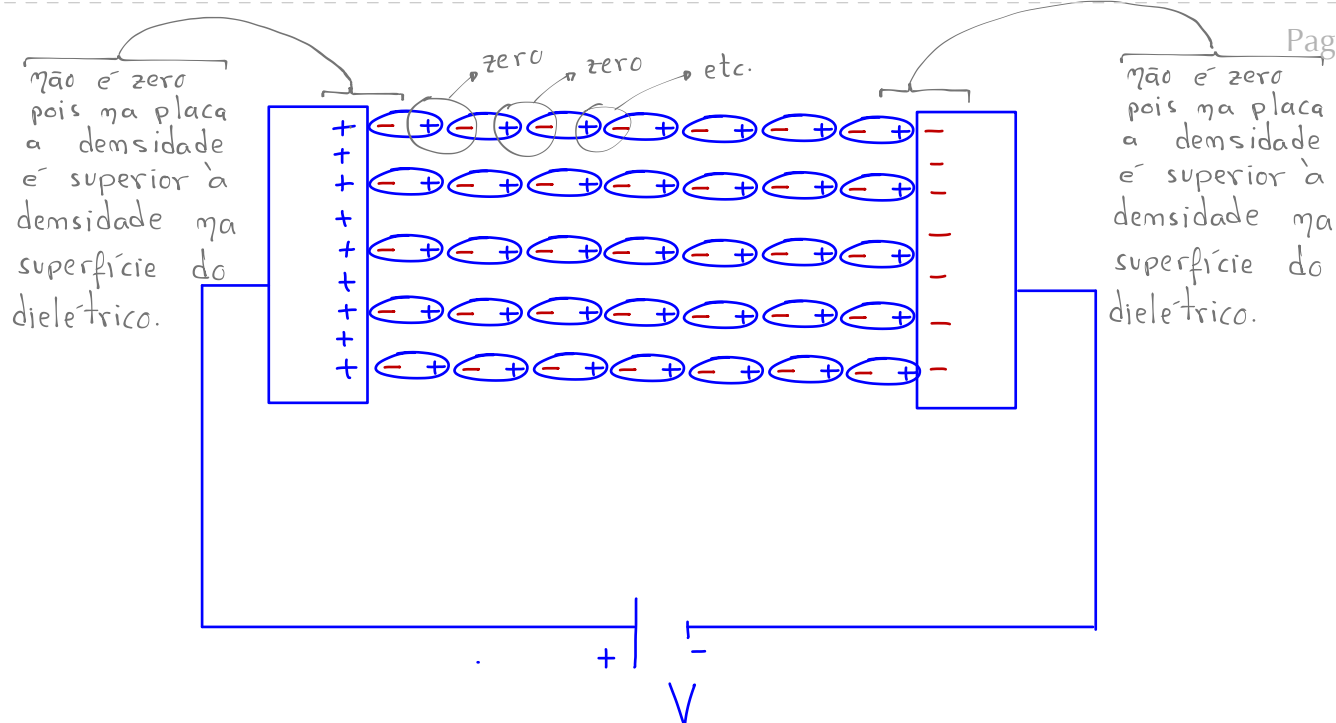
$$Q = CV$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \text{Se } V \text{ é mantido constante e } Q$$

aumenta, então a capacitância C aumenta com a presença do dielétrico.

Em detalhes:

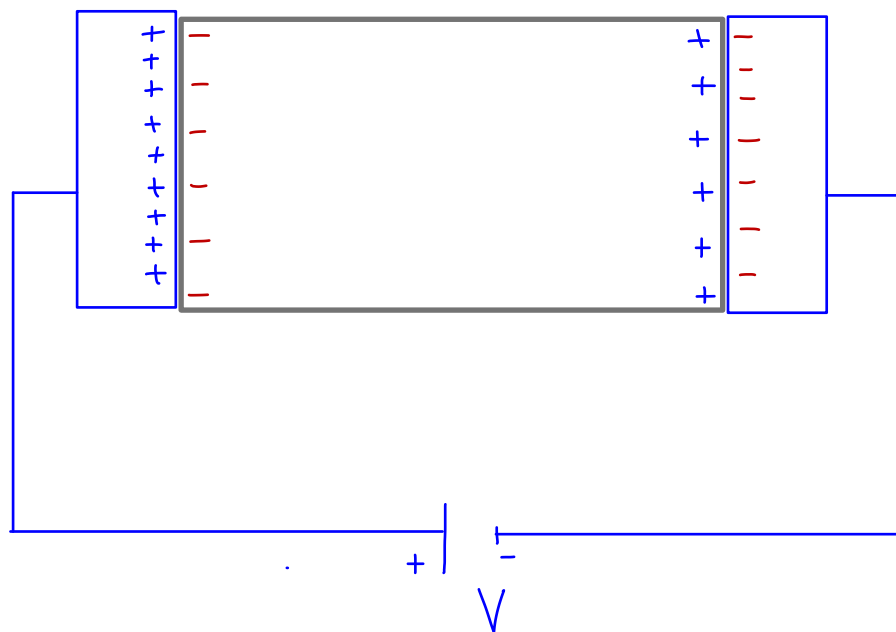




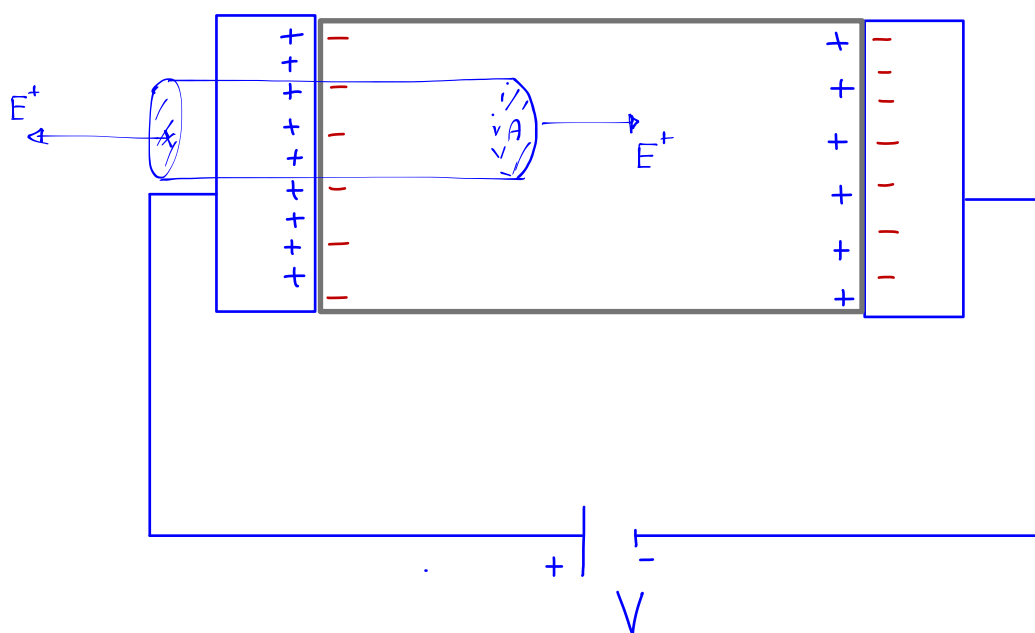
Os pares de cargas positivo/negativa nas extremidades das moléculas se cancelam aos pares pois tratam-se de moléculas do mesmo tipo. Nas interfaces Placa Condutora/Dielétrico, a densidade é maior no condutor, afinal, para manter V é necessário a existência de um campo elétrico no sentido da placa positiva para a placa negativa.

Mas como obter a nova densidade de cargas nas placas do capacitor (equivalentemente a nova carga Q')?
E como obter a nova Capacitância?

⇒ No final do processo temos algo do tipo:



Utilizando uma superfície Gaussiana em uma das placas a fim de calcularmos sua contribuição para o campo entre as placas:



⇒ O campo no interior das placas devido apenas à placa positiva:

$$2E^+ \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Mas σ dentro da superfície Gaussiana conta com as colaborações do condutor e do dielétrico:

$$\sigma = \sigma^+(\text{condutor}) + \sigma^-(\text{dielétrico})$$

$$\Rightarrow E^+ = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2\epsilon_0} \Rightarrow \text{O campo líquido é } E = 2E^+ \text{ devido à contribuição da placa negativa}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{\epsilon_0}$$

Mas qual o valor de σ^- (densidade na superfície do dielétrico)?

Resposta: Depende do tipo de material utilizado como dielétrico. Diferentes materiais = diferentes moléculas = diferentes densidades

De uma forma mais geral ($\vec{E}$ abaixo do valor necessário para polarizar completamente as moléculas do dielétrico $\rightarrow$ abaixo da saturação), a densidade σ^- depende do campo elétrico que atua sobre o dielétrico.

$$\sigma^- = \sigma^-(E)$$

Digamos que seja proporcional: $\sigma^- = -\chi E$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E = \sigma^+ - \chi E$$

$$(\epsilon_0 + \chi) E = \sigma^+$$

$$\Rightarrow \sigma^+ = (\epsilon_0 + \chi) E$$

Obs: Para obtermos $\chi > 0$ precisamos de inserir o sinal negativo, afinal se $\sigma^+ > 0 \Rightarrow \sigma^- < 0$.

χ é uma característica do material dielétrico e dependente, em uma situação abaixo da saturação, do campo elétrico ($\chi \rightarrow \chi(E)$).

Definindo: $\epsilon \equiv \epsilon_0 + \chi$, mantemos o formato das equações aplicadas no vácuo ($\chi = 0$).

$$\Rightarrow \sigma^+ = \epsilon E$$

$\uparrow$
definido como permissividade do dielétrico utilizado.

Note que ao multiplicarmos ambos os lados pela área do capacitor:

$\int \rightarrow$ carga no capacitor.

$$Q = \epsilon E A$$

O campo E^+ foi calculado apenas para a placa positiva. Portanto trata-se da metade do campo total dentro das placas, afinal temos a contribuição da placa positiva.

$$Q = \epsilon E A$$

Mas $Q = CV$

$$CV = \epsilon E A$$

$$C = \frac{\epsilon E A}{V}$$

Mas $V = Ed$

$$\Rightarrow C = \frac{\cancel{\epsilon} E A}{\cancel{E} d}$$

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$\Rightarrow$ Energia armazenada: $\mathcal{E} = \int_0^Q dq E(q) \cdot d$

$$\Rightarrow E(q) = \frac{V}{d} = \frac{q}{C d} \quad \Rightarrow \mathcal{E} = \int_0^Q \frac{q}{C d} dq$$

$$\mathcal{E} = \left. \frac{q^2}{2C} \right]_0^Q$$

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

"Mas aqui $C = \frac{\epsilon A}{d}$, obtido com a permissividade do dielétrico.

Abordagem Geral.

Nosso objetivo é estudar os efeitos resultantes da aplicação de campo elétrico em materiais. Estudamos, anteriormente, alguns casos particulares envolvendo materiais condutores, os quais são caracterizados por permitirem que parte das cargas elétricas que o compõem (elétrons livres) possam fluir, sob "baixa" resistência, quando na presença de um campo elétrico.

"Obviamente" nem todo material é condutor; a matéria se apresenta em diversas formas (sólida, líquida, gasosa, condutora de eletricidade, isolante, vítria, etc.). Mesmo se considerarmos apenas materiais sólidos, por exemplo, encontraremos uma imensa variedade de materiais com diferentes características.

Cada material responde de uma forma particular quando submetido à ação de algum agente externo (campo elétrico, tensão, temperatura, campo magnético, etc.). Vamos, neste ponto, estudar a "resposta" de sólidos não condutores de eletricidade, quando submetidos à campos elétricos.

⇒ Sólidos não condutores são chamados Dieétricos.

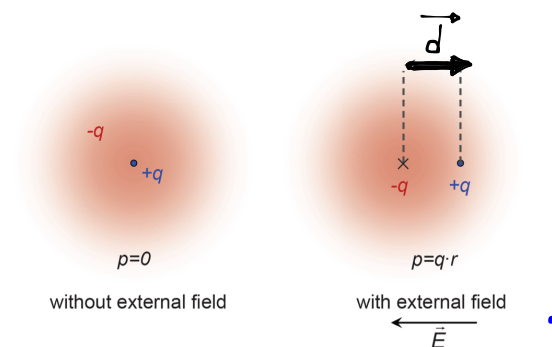
Antes de abordarmos o tópico específico (resposta à aplicação de campo elétrico), vamos dar uma breve explanação sobre os constituintes da matéria - átomos/moléculas.

Campos eletromagnéticos são originados por cargas elétricas. Átomos são compostos por cargas elétricas: Núcleos compostos por prótons (cargas positivas) circundados por uma nuvem de elétrons.

Obs: No contexto atômico, o termo nuvem eletrônica deve ser pensado como nuvem de probabilidade. Mesmo o núcleo do Hidrogênio (um único próton) é circundado por uma nuvem eletrônica ⇒ nuvem associada a um único elétron.

* Importante criar esta "visão" atômica.

⇒ Portanto, quando átomos/moléculas são submetidos a campo elétrico é natural imaginarmos que o núcleo positivo é empurrado no sentido do campo enquanto que a nuvem eletrônica é puxada no sentido oposto, como ilustrado na Fig. abaixo,



Em um dielétrico não há fluxo líquido de elétrons entre átomos vizinhos.

*Vale frisar, no entanto, que sempre existe um valor crítico de campo elétrico, a partir do qual a coesão atômica perde sua resistência e os elétrons passam a fluir. O valor deste campo crítico varia dependendo das particularidades interatômicas e estruturais de cada dielétrico.

Adicionalmente, abaixo do campo crítico, a separação média entre a nuvem eletrônica (seu centro geométrico) e o núcleo atômico depende da intensidade do campo elétrico aplicado.

⇒ Em resumo, quando dielétricos são submetidos a um campo elétrico $\vec{E}$, inferior ao campo crítico, cada molécula fica eletricamente deformada passando a se comportar como um dipolo elétrico:

$$\vec{P}_{\text{molécula}} = q\vec{d} \quad \text{"Ver Fig. acima"}$$

Então, cada molécula produz um potencial

$$V_{mol.}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_{mol.} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

*Veja a parte que tratamos de um dipolo elétrico

Adicionalmente, vimos, quando tratamos da expansão multipolar, que o termo de potencial dipolar - que "possibilita" calcularmos a contribuição dipolar para o potencial, é dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' \cdot \vec{r} dV'$$

Comparando as duas últimas equações acima temos que o momento de dipolo $\vec{P}$ é

$$\vec{P} = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'.$$

Vamos então aplicar esta relação a um átomo (ou molécula).

Obs: Estamos começando uma análise considerando um átomo/molécula, pois trata-se da menor estrutura (composta por prótons e elétrons). Se entendermos a resposta de uma molécula ao campo externo, então o efeito de todo material pode ser obtido por uma soma dos efeitos individuais de cada átomo/molécula.

*O estudante pode se perguntar o motivo porque não estamos considerando outras contribuições para o potencial de um material dielétrico (Monopolo,

quadrupolo, etc...). Como cada molécula é eletricamente neutra, não possui contribuição monopolar. Adicionalmente, toda molécula polarizada representa um dipolo elétrico e, como vimos, mesmo que haja contribuições de ordens superiores, estas são muito menos intensas e podem ser desprezadas relativamente ao termo dipolar.

⇒ Para uma molécula, seu momento dipolar é:

$$\vec{P}_{mol.} = \int_{molécula} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' , \quad \text{ou, equivalentemente, usando}$$

$$dq = \rho(\vec{r}') dV' ,$$

$$\vec{P}_{mol.} = \int_{molécula} \vec{r}' dq .$$

Definição de Polarização.

Queremos estudar o efeito de um material polarizado sobre o espaço que o circunda. Moléculas são extremamente pequenas quando comparadas com as dimensões de materiais sólidos estudados e/ou aplicados em laboratórios. Mesmo quando consideramos pequenos volumes ΔV dentro de um material sob estudo, dentre destas unidades volumétricas "existem" uma grande quantidade de unidades moleculares.

⇒ É adequado, dados os ferramentais matemáticos desenvolvidos para tratarmos de efeitos macroscópicos a partir de efeitos microscópicos (integral, derivada, etc.), definir-se quantidades por unidade volumétrica; tal que, aplicando-se os cálculos diferenciais e integrais, possamos chegar ao efeito global.

Aplicando esta ideia ao momento de dipolo (como se faz, invariavelmente, para demais quantidades físicas), vamos definir

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v}$$

* $\vec{P}$ maiúsculo deve ser identificado como quantidade de momento de dipolo por unidade de volume; enquanto que $\vec{p}$ minúsculo corresponde ao momento de dipolo total do volume Δv .

$\Rightarrow \vec{P} \equiv$ Polarização elétrica

$$\Delta \vec{p} = \int_{\Delta v} \vec{r}' dq$$

Note que, se em um volume Δv existirem n moléculas, cada molécula possuindo um momento de dipolo $\vec{p}_i$, então a polarização elétrica será

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

, onde $\vec{p}_i$ é o momento de dipolo de uma das moléculas dentro de Δv .

Campo Elétrico externo a um material polarizado

Tomando como referência um elemento de volume Δv , o potencial gerado por Δv em um ponto distante do elemento de volume é

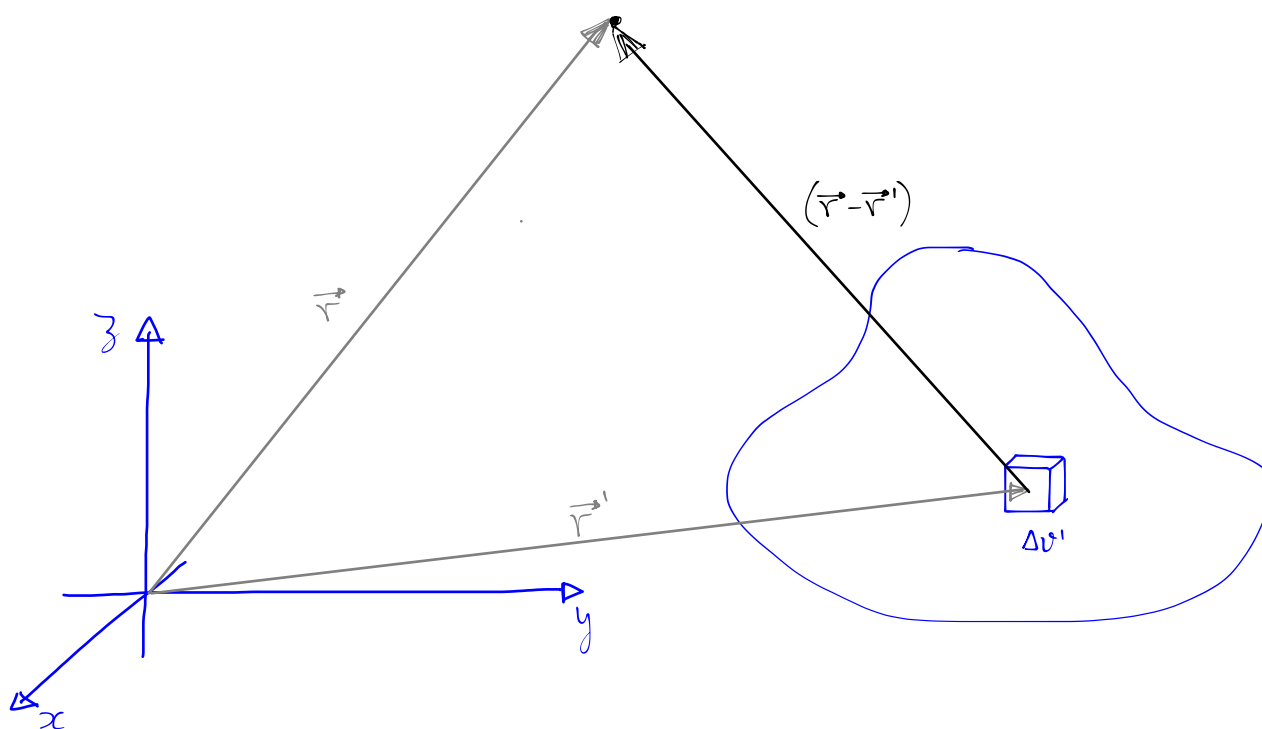
$$\Delta V(\vec{r}) = \frac{\Delta \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Obs: Utilizamos $\Delta V(\vec{r})$ pois estamos considerando a contribuição da porção Δv para o potencial total $V(\vec{r})$. $V(\vec{r})$ será obtido pela soma de todas as contribuições.

Como definimos que $\vec{P} \equiv \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$; $\Delta \vec{P} = \vec{P} \Delta v$.

$$\Rightarrow \Delta V(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \Delta v'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Obs: $\vec{r}'$ corresponde à localização do elemento de volume $\Delta v'$. Portanto, $(\vec{r} - \vec{r}')$ corresponde ao vetor que determina a distância de um ponto no espaço ao elemento de volume $\Delta v'$, responsável pela contribuição ΔV para o potencial total $V(\vec{r})$.



$\Rightarrow$ Fazendo $\Delta v'$ um elemento infinitesimal dv' :

$$V(\vec{r}) = \int_{v'} dV, \text{ sendo } dV = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Apesar de termos chegado a uma expressão capaz de fornecer a contribuição de uma material polarizado para o potencial elétrico; a forma acima pode ser manipulada matematicamente assumindo um formato similar ao já conhecido por uma distribuição monopolar (apenas similar)

$\Rightarrow$ Vamos manipular a equação acima objetivando reescrevê-la em uma forma similar a

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA + \int_{V'} \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\}$$

*No caso monopolar σ e ρ denotam densidade superficial e volumétrica de carga elétrica, respectivamente.

Ao observarmos com maiores detalhes a expressão

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV',$$

e reverbarmos as identidades obtidas com operações vetoriais (estudos introdutórios normalmente apresentados nos livros de teoria eletromagnética), "percebemos" que o integrando acima pode ser manipulado utilizando a identidade

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{F}) = \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \psi.$$

Não há uma relação óbvia em primeira análise. Observe, no entanto

que $\frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ se assemelha, em sua forma de produto escalar,

com o termo $\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \psi$ na identidade acima. Consideremos

$\vec{p}$ no lugar de $\vec{F}$ e $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ no lugar de $\vec{\nabla}\psi$

$$\vec{p} \equiv \vec{F} \quad \text{e} \quad \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \equiv \vec{\nabla}\psi$$

Mas qual a função escalar ψ tal que

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad ?$$

$$\Rightarrow \text{se } \psi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

Mas o que representa $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$?

representa a taxa de variação da distância entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ (o inverso desta taxa).

$\Rightarrow$ Fazendo $|\vec{r}-\vec{r}'| \equiv d'$ "o superíndice linha denota que a variável é $\vec{r}'$ "

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{d'} \right) = (-1) d'^{-2} \hat{d}'$$

" $\hat{d}'$ = unitário no sentido de d' "

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{d'} \right) = (-1) \cdot \frac{1}{d'^2} \hat{d}'$$

$$\text{ou } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = (-1) \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{d}'$$

$$\text{mas } \hat{d} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = (-1) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Usando a identidade $\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{F}) = \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \psi$, em nosso caso

$$\vec{F} = \vec{p} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{p}$$

Voltando à expressão original:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{p}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \right] dv'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

* Lembrando o teorema da divergência:

$$\underbrace{\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dv}_{\text{Soma dos fluxos pontuais através das unidades de volumes dentro de um volume delimitado por uma superfície S.}} = \underbrace{\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA}_{\text{Fluxo através da superfície que delimita o volume.}}$$

Aplicando este teorema na integral $\int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv'$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

* Esta forma para o potencial elétrico proveniente da polarização (contribuição dipolar) se assemelha com a forma tradicional para o potencial gerado por monopolos (cargas líquidas)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S'} \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \int_{V'} \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right]$$

sendo σ a densidade superficial de carga e ρ a densidade volumétrica.

Podemos definir então:

$$\sigma_p \equiv \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \text{e} \quad \rho_p \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad ; \quad \text{tal que}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{S'} \frac{\sigma_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \int_{V'} \frac{\rho_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right\}$$

Neste ponto, vamos fazer uma análise direcionada aos fatores σ_p e ρ_p :

- (1) O que σ_p e ρ_p representam?
Seriam cargas elétricas líquidas?

Análise: Uma visão física de um fator que resulta de manipulação matemática (álgebra e definições) "deve" ser trabalhada voltando ao fator primitivo que deu origem ao fator final.

$\Rightarrow$ Tanto σ_p quanto ρ_p são definidos em termos do vetor polarização $\vec{P}$, que por sua vez é definido em termos dos momentos de dipolos elétricos $\vec{p}$ existentes em uma unidade de volume.

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} \quad \text{"dipolo magnético por unidade de volume"}$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \text{ou} \quad \sigma_p = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} \cdot \hat{n}$$

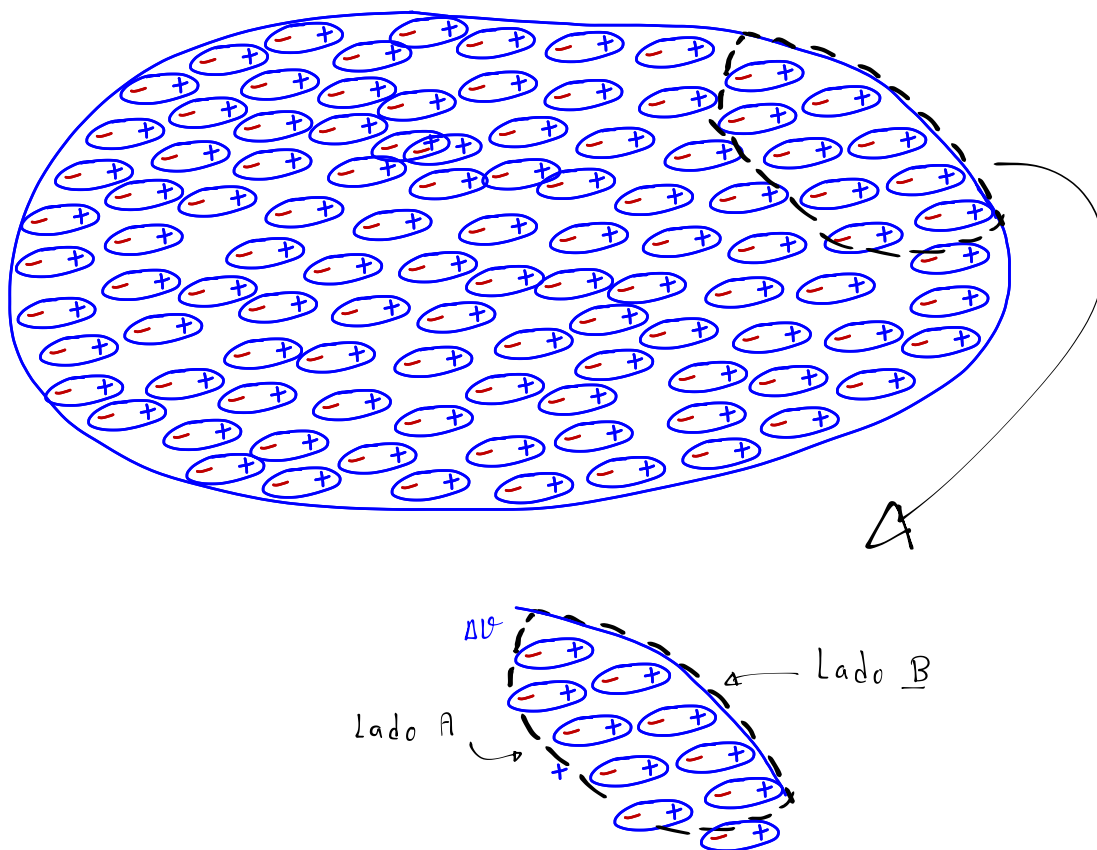
$\Rightarrow$ Portanto σ_p = Quantidade de dipolo por unidade de volume na região de superfície (próxima à superfície) projetado perpendicularmente ao elemento de superfície.

Dimensão de σ_p :

$$[\sigma_p] = \left[\frac{\vec{p}}{v} \right] = \frac{[q \cdot d]}{[d^3]} = \frac{\text{Coulomb} \cdot \text{metro}}{\text{metro}^3}$$

$$[\sigma_p] = \frac{C}{m^2} \quad \text{"densidade superficial de carga."}$$

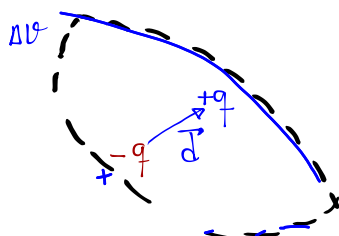
De fato, para uma "unidade de volume", digamos o volume delimitado pela linha pontilhada abaixo



$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{v}'$$

Em média, o elemento de volume acima apresenta carga líquida positiva do lado B e carga líquida negativa do lado A (resultando em carga total nula dentro de Δv); o que podemos representar como:

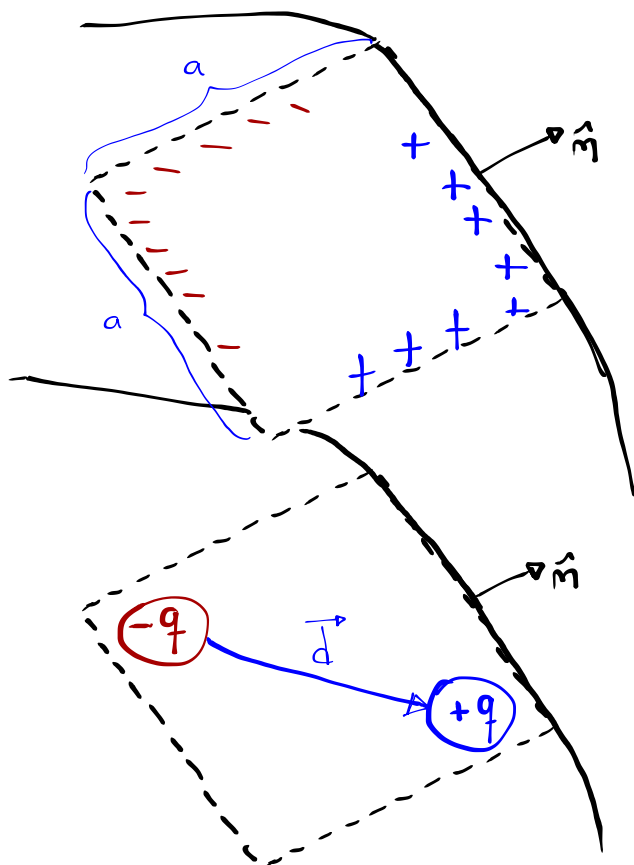




$$\Delta \vec{p} = q \vec{d}$$

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{q \vec{d}}{\Delta V}$$

Por simplicidade, vamos considerar que o elemento de volume seja cúbico de lados com comprimentos a . Adicionalmente, vamos considerar que os dipolos não estejam colineares com as arestas:



ou

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} = \frac{q \vec{d}}{\Delta v}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{q \vec{d} \cdot \hat{n}}{a^3}$$

Note que $\vec{d} \cdot \hat{n}$ denota o percentual de q sobre a superfície externa de Δv : $\searrow$

Se $\vec{d}$ é perpendicular a $\hat{n} \Rightarrow \vec{d} \cdot \hat{n} = \text{zero} \Rightarrow$ não há carga na superfície externa devido à polarização em Δv .

Se $\vec{d}$ é colinear com $\hat{n}$, então $\vec{d} = a \hat{n}$ e

$$\sigma_p = \frac{q a \hat{n} \cdot \hat{n}}{a^3} = \frac{q}{a^2}, \text{ ou seja, toda a carga}$$

elétrica q está sobre a superfície externa resultando em uma densidade superficial de carga σ_p .

Portanto: σ_p representa a densidade superficial de carga devido ao efeito de polarização.



Análise para $\rho_p = -\text{div.} \vec{P}$

Análise para $\rho_p = -\text{div} \cdot \vec{P}$

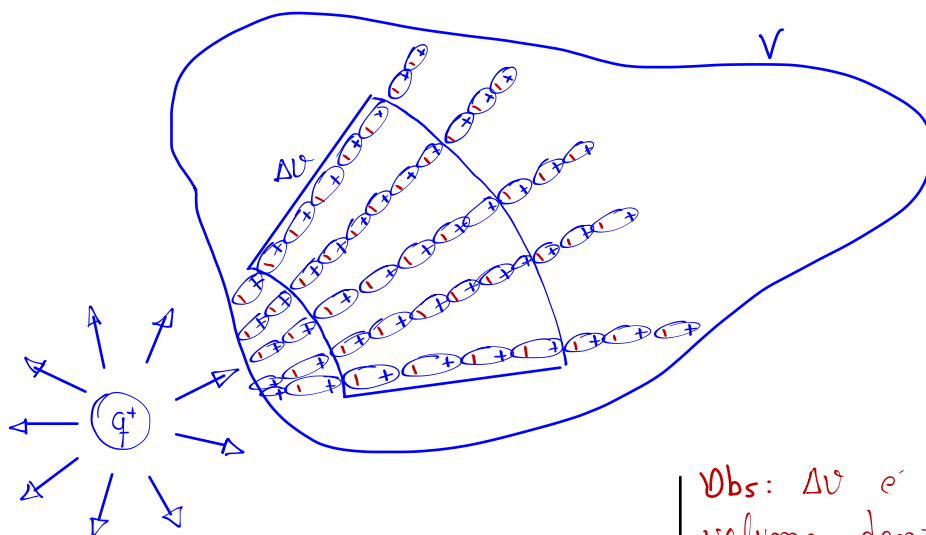
Similarmente, $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$

Obs: Importante lembrar a diferença entre $\vec{P}$ maiúsculo e $\vec{p}$ minúsculo (Polarização e momento de dipolo, respectivamente).

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{p}}{dv} \right) =$ Fluxo da densidade de momento de dipolo através da superfície que delimita um elemento de volume.

Como o significado físico de $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ é o mesmo para qualquer que seja a situação particular de estudo, vamos supor uma situação com simetria simples.

(1º) Um elemento de volume é posto em uma região de campo elétrico radial (próximo a uma carga pontual, por exemplo).



Obs: Δv é um "pequeno" volume dentro do volume total da amostra polarizada V .

$\Rightarrow$ Analisaremos um volume menor dentro de um material polarizado devido ao fato de $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ estar na integral volumétrica, diferentemente do caso anterior (superfície).

Dentro do volume Δv , queremos analisar o significado de

$$\rho_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Primeiro vamos analisar a dimensão de $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ = Fluxo de $\vec{P}$ através da área que delimita um elemento de volume, dividido pelo volume

"Baste rever a definição de divergente de um vetor $\vec{F}$:"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

$$\text{Então: } [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = \left[\frac{\text{Polarização} \times \text{Área}}{\text{Volume}} \right]$$

$$\text{Mas } [\text{Polarização}] = \left[\frac{\text{Carga} \times \text{distância}}{\text{Volume}} \right]$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = \left[\frac{\text{Carga} \times \text{distância} \times \text{Área}}{\text{Volume} \times \text{Volume}} \right]$$

Como distância $\times$ Área = Volume

$$\Rightarrow [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = \left[\frac{\text{Carga} \times \cancel{\text{Volume}}}{\text{Volume} \times \cancel{\text{Volume}}} \right]$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = \left[\frac{\text{Carga}}{\text{Volume}} \right]$$

Ou seja, $[\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = \text{densidade volumétrica de carga.}$

Procedimento físico aplicado ao exemplo ilustrado acima:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv = ?$$

Mais uma vez, usando a identidade $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dv = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA$$

Mas a polarização em um elemento de volume é proporcional ao campo elétrico aplicado ao material polarizado;

$$\vec{P} = cte \vec{E}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_S cte \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = cte \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA$$

Mas sabemos, das equações de Maxwell, que

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Obviamente, na parte volumétrica do material polarizado (ver Fig.) a carga total dentro do volume é zero.

Então:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = cte \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \text{zero}$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv = \text{zero} \quad \text{para um material polarizado sem carga líquida na região volumétrica.}$$

Portanto:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{S'} \frac{\sigma_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dS' + \int_{V'} \frac{\rho_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dv' \right\}$$

$$V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dS'}_{\text{Termo 1}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dv'}_{\text{Termo 2}}$$

Termo 1 = Potencial devido às cargas nas regiões de superfície, devido à polarização.

Termo 2 = Potencial devido à parte volumétrica; só é diferente de zero quando houver carga(s) dispersas dentro do material polarizado.

Note que (veja na pág. anterior):

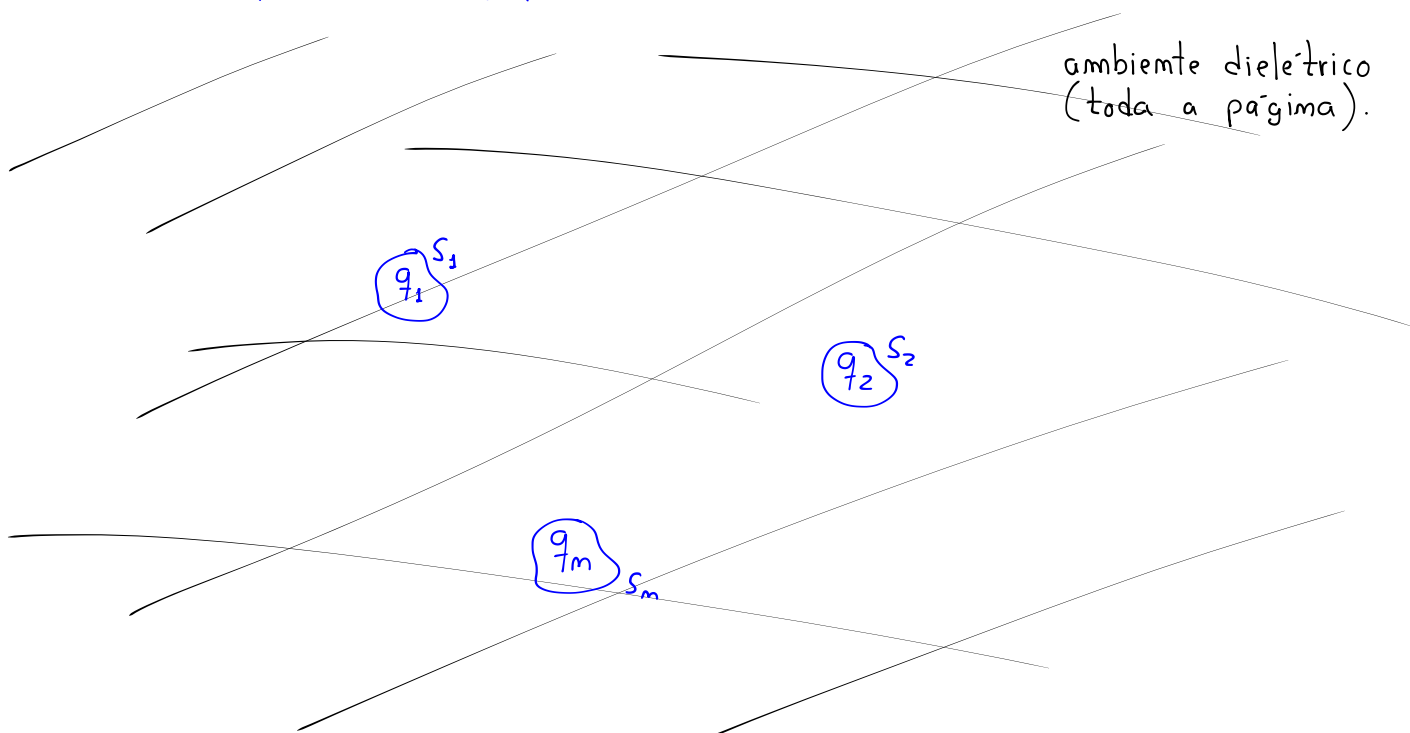
$$\int_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = \text{cte} \underbrace{\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA}_{q/\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = \text{cte} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 / \text{cte}}$$

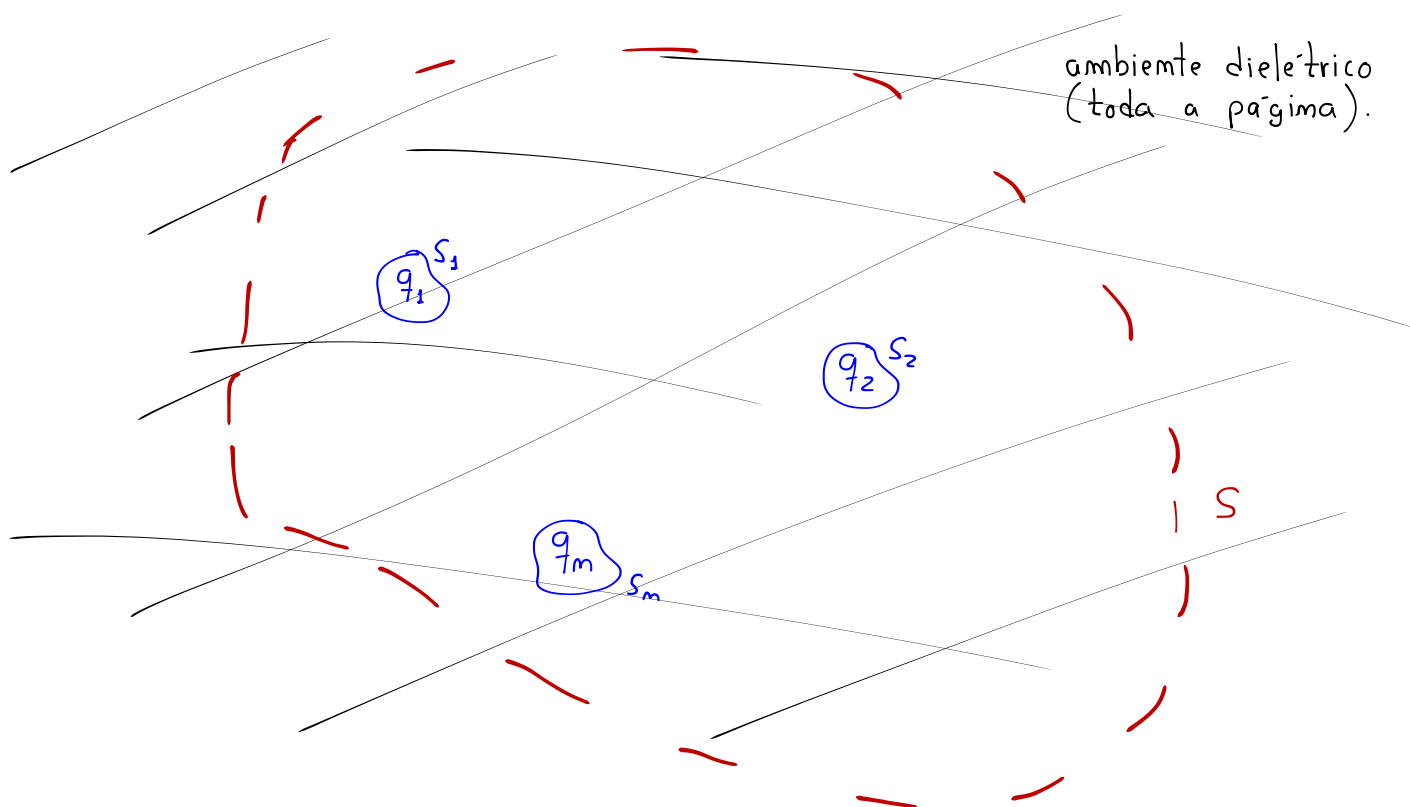
$$\Rightarrow \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{q}{\epsilon}, \quad \text{onde } \epsilon \equiv \frac{\epsilon_0}{\text{cte}} = \text{permissividade elétrica do material.}$$

Neste ponto vamos rever a constante usada acima ($\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$) utilizando as definições usuais (tal como nos livros).

A fim de "trocarmos" o ambiente vácuo por um ambiente mais geral (dielétrico qualquer), vamos considerar cargas elétricas dentro de um ambiente dielétrico:



Assim como fizemos com cargas no vácuo, vamos traçar uma Gaussiana $\underline{S}$ envolvendo as cargas $q_1 \dots q_m$. $\Downarrow$



Vamos aplicar o fluxo elétrico sobre $\underline{S}$, lembrando que abaixo de $\underline{S}$ existem as cargas $q_1, q_2, \dots, q_n$ e também as cargas do dielétrico polarizado.

$$\Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{(\text{Toda carga dentro de } S \equiv Q_T)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Mas } Q_T = q_1 + q_2 + \dots + q_n + Q_p$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Cargas de polarização.}}$

$$\Rightarrow Q_p = \int_{S^*} \vec{P} \cdot \hat{n} dA + \int_V -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

Obs: S^* = superfícies que delimitam o dielétrico. Notem que a superfície Gaussiana $\underline{S}$ não delimita o dielétrico.

$$\Rightarrow S^* = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

Obs: A segunda integral deve ser aplicada no volume V delimitado pela Gaussiana S .

$$\Rightarrow Q_p = \int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \vec{P} \cdot \hat{n} dA + \int_V -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Pelo teorema da divergência:}}$

$$-\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = -\int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n + S} \vec{P} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Rightarrow Q_p = \cancel{\int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \vec{P} \cdot \hat{n} dA} - \cancel{\int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \vec{P} \cdot \hat{n} dA} - \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0}, \text{ onde } Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N \quad (\text{cargas colocadas no dielétrico})$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q - \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dA}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_S \left[\vec{E} \cdot \hat{n} + \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{\epsilon_0} \right] dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\int_S \left[\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right] \cdot \hat{n} dA = Q$$

Define-se o vetor deslocamento
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$;

$$\boxed{\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = Q}$$

Análise: a relação $\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = Q$ é mais geral que

$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$, sendo esta última um caso particular.

Adicionalmente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} Q$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, onde ρ é a densidade de cargas livres dentro do dielétrico.

Se considerarmos que $\vec{P} = \chi(E) \vec{E}$, o que é esperado, afinal só a polarização é induzida por $\vec{E}$, temos que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \vec{E} = (\epsilon_0 + \chi) \vec{E}$$

Definindo $(\epsilon_0 + \chi) \equiv \epsilon$;

$$\int_S \epsilon \vec{E} \cdot \hat{n} dA = Q$$

$$\boxed{\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{Onde } \vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

O coeficiente $\chi(E)$ é uma característica do ambiente no qual atua o campo $\vec{E}$.

Note que para o Vácuo $\chi = 0 \Rightarrow \vec{D} = (\epsilon_0 + \chi) \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} .$$



É conveniente trabalhar-se com a constante adimensional que caracteriza a relação entre permissividades de diferentes meios.

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon = K \epsilon_0} . \quad K \text{ é denominada constante dielétrica.}$$

Obs: Definimos $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$
 $\Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \right)$

Portanto: $K = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} .$

Assim, se $\chi = 0$ (vácuo) $\Rightarrow K = 1$
e $\epsilon = \epsilon_0 .$

Na tabela abaixo estão alguns valores para constantes dielétricas de alguns materiais, bem como campos elétricos críticos.

Material	Dielectric	Material	Dielectric
Acrylic (Plexiglass)	2.7 - 4.5	Polyamide	2.5-2.6
Acrylonitrile Butadiene Styrene (ABS)	2.87	Polycarbonate (Lexan®)	2.9-3.0
Acetal resin (Delrin)	3.6	Polyester film (Mylar)	2.83-4.5
Air	1.000585	Polyethylene	2.27-2.5
Alumina	9.3 - 11.5	Polypropylene	2.25
Asbestos	3.0 - 4.8	Polystyrene	2.4-2.6
Bakelite	3.5-5.0	Polyvinyl Chloride (PVC)	2.8-3.4
Beeswax	2.6- 3.0	Porcelain	5.1-6.0
Celluloid	3.3-11	Pyrex Glass	4.3 - 5.0
Epoxy Resin (Cast)	3.6	Quartz	4.2
Formica	3.6 - 6	Rubber Cement	2.7-2.9
FR-4	4.3 - 5.0	Silicon	11.0 - 12.0
Mica	5.4	Silicone Oil	2.2-2.9
Micarta	3.2 - 5.5	Silicone Rubber	3.2-9.8
Neoprene	6-9	Silk	2.5-3.5
Nylon	4.0 - 5.0	Styrene (ABS)	2.8
Paper (clean)	3.0	Teflon (PTFE)	2.1
Paraffin Wax	2.1-2.5	Teflon (glass weave)	2.2-2.8
Phenol resin	4.9	Water (Distilled)	76.5 - 80
		Wax	2.4-6.5

Tabela baixada em:

<http://www.embedded.com/design/real-time-and-performance/4008257/Bringing-reliable-touch-sensor-technology-to-handheld-mobile-devices>

Exemplo: "Reitz-Milford"

Carga pontual em um líquido dielétrico.

⇒ Traçar uma Gaussiana ao redor da carga pontual. Para uma Gaussiana com simetria esférica ao redor da carga pontual:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = Q$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$\Rightarrow D = \epsilon E$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Introduzindo a constante dielétrica $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi K \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Para polarização:

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$$\text{Mas } \epsilon = \epsilon_0 + \chi$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon - \epsilon_0 = K\epsilon_0 - \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon_0 (K - 1)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \cancel{\epsilon_0} (K - 1) \cdot \frac{Q}{4\pi K \cancel{\epsilon_0} r^2} \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{(K - 1) Q}{4\pi K r^2} \hat{r}}$$

Claramente o campo elétrico é enfraquecido pelo efeito de polarização pois $\epsilon > \epsilon_0$. É instrutivo analisarmos, em termos das cargas polarizadas Q_p , o motivo deste enfraquecimento.

Uma carga real não é pontual. Vamos supor uma carga com raio $\underline{b}$.
 $\Rightarrow$ O dielétrico ao seu redor fica polarizado, como representado abaixo, para uma carga pontual negativa.

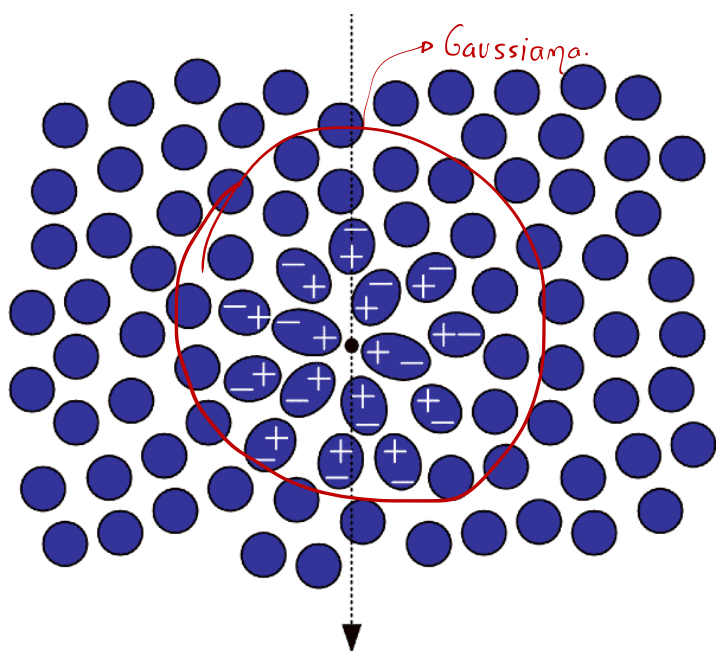


Fig. baixada em: <http://mxp.physics.umn.edu/s04/projects/s04cherenkov/theory.html>

A carga abaixo da Gaussiana possui as contribuições da carga pontual Q e também das cargas polarizadas Q_p .

Como vimos acima:

$$Q_p = \int_{S^*} \sigma_p dA + \int_{V^*} \rho_p dV$$

$\int_{S^*}$ Superfícies do dielétrico que estiverem abaixo da Gaussiana.
 $\int_{V^*}$ Volume abaixo da Gaussiana.

$\Rightarrow$ Claramente; S^* é a superfície que circunda a carga Q ; uma superfície que delimita um volume de raio $\underline{b}$ (volume ocupado pela carga Q).

A integral $\int_{V^*} \rho_p dV$ dá zero pois na região volumétrica do dielétrico não há carga líquida.

Portanto, usando $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$

$$Q_p = \int_{S^*} \vec{P} \cdot \hat{n} dA = P \cdot 4\pi b^2$$

$$\text{Mas } \vec{P}(\vec{r}) = \frac{(K-1)Q}{4\pi K r^2} \vec{r}$$

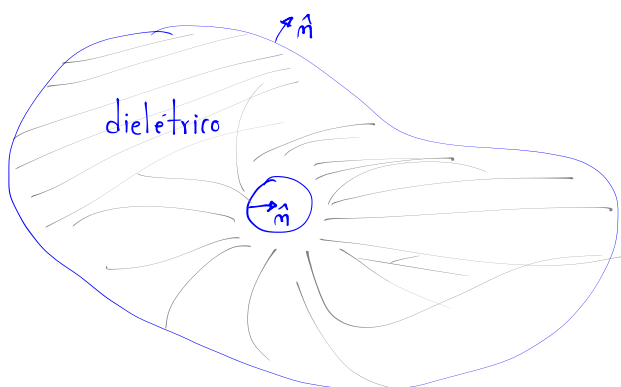
Na região de interface entre o dielétrico e a carga Q ($r=b$)

$$\Rightarrow \vec{P}(r=b) = \frac{(K-1)Q}{4\pi K b^2} \vec{r}$$

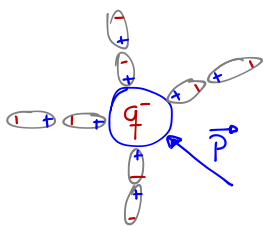
$$\Rightarrow Q_p = \frac{(K-1)Q}{4\pi K b^2} \cdot 4\pi b^2$$

$$Q_p = \frac{(K-1)Q}{K}$$

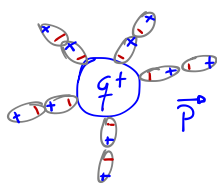
Notar que, do ponto de vista das superfícies que delimitam o dielétrico, o vetor $\hat{n}$ em $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ é para dentro do volume ocupado por Q .



Então podemos concluir que $\vec{P} \cdot \hat{n} > 0$ se a carga Q for negativa



e $\vec{P} \cdot \hat{n} < 0$ se $Q > 0$



Este fato é levado em consideração por um sinal negativo:

$$Q_p = - \frac{(K-1)}{K} Q$$

A carga total abaixo da Gaussiana é

$$Q_p + Q = - \frac{(K-1)}{K} Q + Q$$

$$Q_p + Q = \left[\frac{-K+1}{K} + 1 \right] Q$$

$$Q_p + Q = \frac{-K+1+K}{K} Q$$

$$Q_p + Q = \frac{Q}{K}$$

No vácuo $K=1 \Rightarrow Q_p + Q = Q$, não há carga de polarização.

Para um dielétrico qualquer $\Rightarrow K > 1 \Rightarrow Q_p + Q < Q$, ou seja, a carga total abaixo da Gaussiana é diminuída, enfraquecendo o campo elétrico.