Problemas

Esfera dielétrica de raio $\underline{a}$ em uma região com campo elétrico uniforme. Considerar vácuo fora da esfera.

O que iremos usar?

$\Rightarrow$ Na região dentro do dielétrico.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ "ρ = densidade de carga livre"

$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon}$ com $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$\Rightarrow \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\epsilon}$

Mas não existem cargas livres, portanto

$\underline{\nabla^2 V = 0}$ dentro e fora da esfera.

A simetria do problema em questão é azimutal (não depende de φ). Então as soluções são do tipo já estudado.

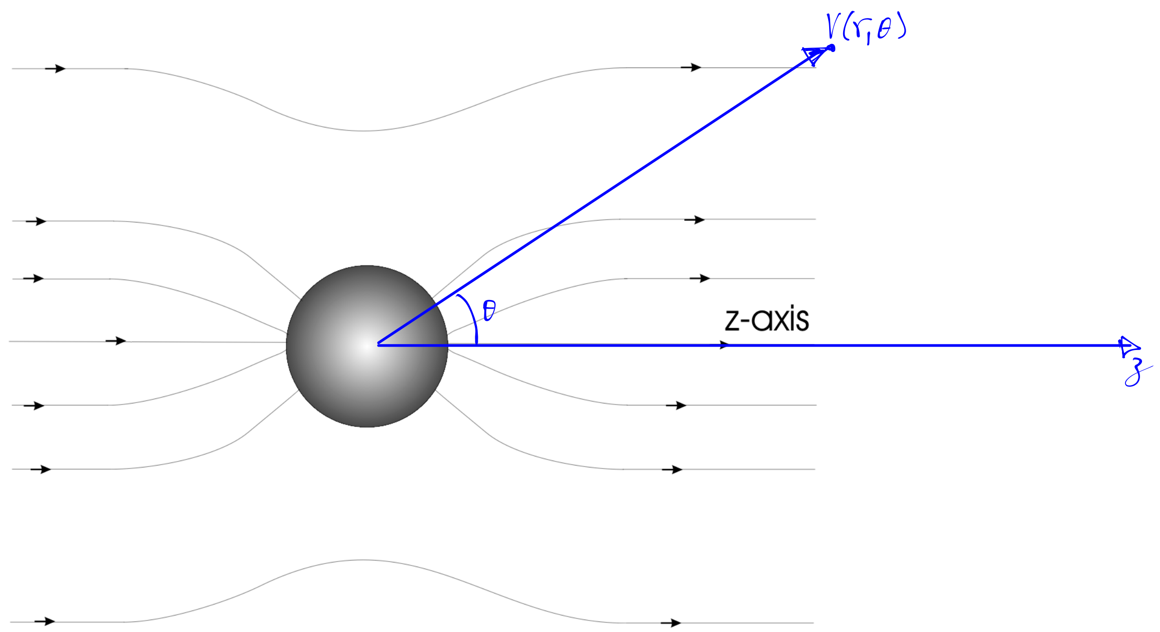
O potencial é do tipo:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l \Theta_l(\theta) + \frac{B_l}{r^{(l+1)}} \Theta_l(\theta) \right].$$

Sendo:

l	$r^l \Theta_l(\theta)$	$r^{-(l+1)} \Theta_l(\theta)$
0	1	r^{-1}
1	$r\cos(\theta)$	$r^{-2}\cos(\theta)$
2	$\frac{1}{2} r^2 \left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$	$\frac{1}{2} r^{-3} \left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$
3	$\frac{1}{2} r^3 \left(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right)$	$\frac{1}{2} r^{-4} \left(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right)$
4	$\frac{1}{8} r^4 \left(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3\right)$	$\frac{1}{8} r^{-5} \left(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3\right)$

Vamos situar o sistema referencial no centro da esfera.



Devemos escolher dentre todas as soluções possíveis para problemas com simetria azimutal (cada l corresponde a duas soluções), aque las que se acoplam aos valores de contorno do problema particular.

No caso as condições de contorno são:

valor eferência em $\theta = 90°$

Para $r \to \infty \Rightarrow V(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) + cte$

Fora da esfera $\Rightarrow V_{For}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l \Theta_l(\theta) + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta_l(\theta)\right]$.

Nado podemos dizer sobre os $\frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta_l(\theta)$, pois zeram se $r \to \infty$.

Mas podemos concluir que todos os A_l com $l > 1$ são nulos.

$$\Rightarrow V_{Fora}(r,\theta) = A_0\,\Theta_0(\theta) + A_1 r\,\Theta_1(\theta) + \sum_l \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta_l(\theta)$$

Usando os valores para $\Theta_0(\theta)$ e $\Theta_1(\theta)$ e

$$V_{fora}(r,\theta) = A_0 + A_1 r\cos(\theta) + \sum_l \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\Theta_l(\theta)$$

$$V_{fora}(r,\theta) = A_0 + A_1 r\cos(\theta) + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta) + \frac{B_2}{r^3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{etc.}$$

Dentro da esfera: O potencial deve ser finito em $r = 0$, então todos os B_l' devem ser zero, eliminando os termos com $\underline{r}$ no denominador.

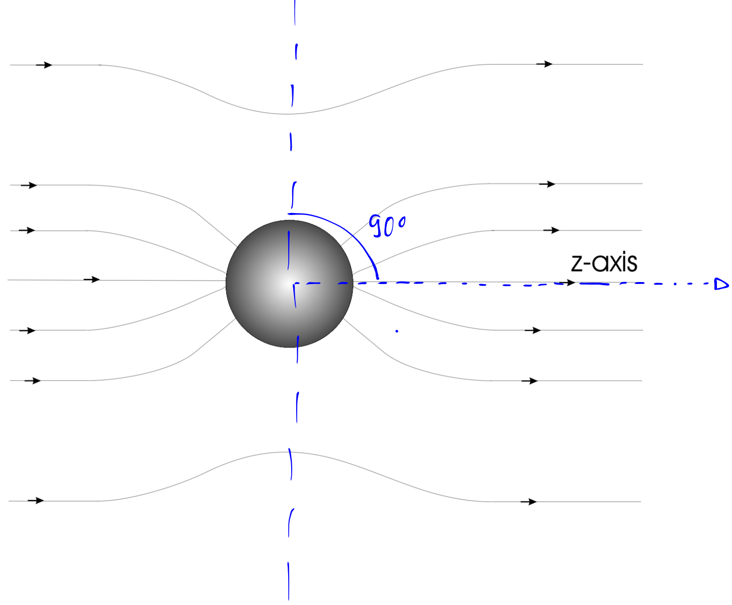
$$V_{dentro}(r,\theta) = A_0' + A_1' r\cos(\theta) + A_2' r^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{etc.}$$

Temos então:

$$V_{fora}(r,\theta) = A_0 + A_1 r\cos(\theta) + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1\cos(\theta)}{r^2} + \frac{B_2}{r^3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{ etc.}$$

$$V_{dentro}(r,\theta) = A'_0 + A'_1 r\cos(\theta) + A'_2 r^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{ etc.}$$

Notar que $V(r, \theta = 90°) = cte$; ou seja, possui o mesmo valor em qualquer ponto do espaço (dentro e fora da esfera). Este fato deve-se a que deslocamentos através da direção com $\theta = 90°$ são sempre perpendiculares ao campo elétrico.



$$\Rightarrow \quad V_{Fora}(r, 90°) = V_{dentro}(r, 90°)$$

$$A_0 + A_1 r\cos(\theta) + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1\cos(\theta)}{r^2} + \frac{B_2}{r^3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{ etc.} =$$

$$A'_0 + A'_1 r\cos(\theta) + A'_2 r^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + \dots \text{ etc.}$$

O que só é possível se A'_2, B_2 ; A'_3, B_3 ; etc. $= 0$

Afinal $A' r^2 (-1)$ não pode ser igual a $\frac{B_2}{r^3}(-1)$. Notar que B_0 deve ser nulo também.

$$\Rightarrow V_{Fora}(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta)$$

$$V_{dentro}(r,\theta) = A_0' + A_1' r\cos(\theta)$$

Obs: Usamos $A_1 = -E_0$, pois

$V_{Fora}(r \to \infty) = cte - E_0 r\cos(\theta)$.

Para $r = a$, região de superfície da esfera:

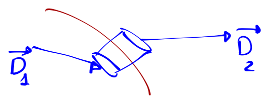
$$V_{Fora}(r=a,\theta) = V_{dentro}(r=a,\theta)$$

$$A_0 - E_0 a\cos(\theta) + \frac{B_1}{a^2}\cos(\theta) = A_0' + A_1' a\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow A_0 = A_0'$$

$$-E_0 a + \frac{B_1}{a^2} = A_1' a \qquad (1)$$

Usando $D_{2n} - D_{1n} = \rho$



$D_{2n} - D_{1n} = 0$

Como não tem carga livre $\Rightarrow \rho = 0$.

Mas $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 0$$

$$E_{1n} = -\frac{\partial V_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} \quad \text{e} \quad E_{2n} = -\frac{\partial V_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

índice $\underline{2}$ = fora e
índice 1 = dentro.

$$V_1(r,\theta) = A_0' + A_1' r\cos(\theta)$$

$$V_2(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta)$$

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial r}\right|_{r=a} = A_1'\cos(\theta)$$

$$\left.\frac{\partial V_2}{\partial r}\right|_{r=a} = -E_0\cos(\theta) - \frac{2B_1}{a^3}\cos(\theta)$$

Portanto: $-\epsilon_2 E_0\cos(\theta) - \epsilon_2\frac{2B_1}{a^3}\cos(\theta) = \epsilon_1 A_1'\cos(\theta) \quad (2)$

Temos duas equações para B_1 e A_1

$$\begin{cases} -E_0 a + \frac{B_1}{a^2} = A_1' a & (1) \\ -\epsilon_2 E_0\cos(\theta) - \epsilon_2\frac{2B_1}{a^3}\cos(\theta) = \epsilon_1 A_1'\cos(\theta) & (2) \end{cases}$$

Rearranjando

$$\begin{cases} -E_0 + \frac{B_1}{a^3} = A_1' & (3) \\ -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.E_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.\frac{2B_1}{a^3} = A_1' & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -E_0 + \frac{B_1}{a^3} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}E_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}2B_1$$

$$\Rightarrow B_1\left(\frac{1}{a^3} + \frac{2\epsilon_2}{a^3\epsilon_1}\right) = E_0\left(1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)$$

$$B_1\left(\frac{\epsilon_1+2\epsilon_2}{\epsilon_1 a^3}\right)=E_0\left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)$$

$$B_1=\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)\;E_0 a^3}{(\epsilon_1+2\epsilon_2)}$$

Mas $\epsilon_2=\epsilon_0$ "vácuo".

$\epsilon_1=k\epsilon_0$

$$\Rightarrow \boxed{B_1=\frac{(K-1)E_0a^3}{(K+2)}}$$

este resultado em (3) $\qquad -E_0+\frac{B_1}{a^3}=A_1'$

$$-E_0+\frac{1}{\cancel{a^3}}\frac{(K-1)}{(K+2)}E_0\cancel{a^3}=A_1'$$

$$\Rightarrow A_1'=-E_0+\frac{(K-1)}{(K+2)}E_0$$

$$A_1'=E_0\left[\frac{(K-1)}{(K+2)}-1\right]=E_0\left[\frac{K-1-K-2}{K+2}\right]$$

$$\boxed{A_1'=-\frac{3E_0}{K+2}}$$

Voltando com as constantes e $V_{Fora}(r,\theta)$ e $V_{dentro}(r,\theta)$:

$$\boxed{\begin{aligned}V_{dentro}(r,\theta)&=A_0-\frac{3E_0}{K+2}r\cos(\theta)\\ V_{Fora}(r,\theta)&=A_0-E_0r\cos(\theta)+\frac{(K-1)E_0a^3}{(K+2)\,r^2}\cos(\theta)\end{aligned}}$$

Pergunta: O que representa o termo A_0?

Conferindo que $V_{Fora}(a,\theta) = V_{dentro}(a,\theta)$

$$V_{Fora}(a,\theta) = A_0 - E_0 a\cos(\theta) + \frac{K E_0 a\cos(\theta)}{(K+2)} - \frac{E_0 a\cos(\theta)}{K+2}$$

$$V_{Fora}(a,\theta) = A_0 \frac{\cancel{-KE_0 a\cos(\theta)} - 2E_0 a\cos(\theta) + \cancel{KE_0 a\cos(\theta)} - E_0 a\cos(\theta)}{K+2}$$

$$V_{Fora}(a,\theta) = A_0 - \frac{3E_0 a\cos(\theta)}{K+2}$$

$$V_{dentro}(a,\theta) = A_0 - \frac{3E_0 a\cos(\theta)}{K+2}$$

Obtenção de $\vec{E}_{dentro}$, $\vec{P}$ e σ_p.

$$\vec{E}_{dentro} = -\vec{\nabla} V_{dentro}$$

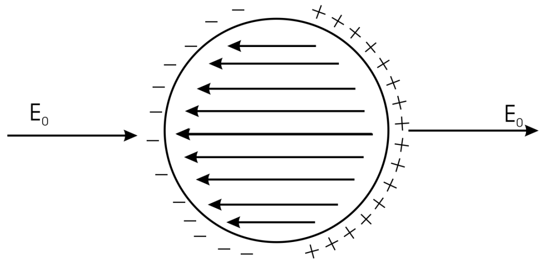
Notar que $V_{dentro} = A_0 - \frac{3E_0}{(K+2)} \overbrace{r\cos(\theta)}^{z}$

$$V_{dentro} = A_0 - \frac{3E_0}{(K+2)} z$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla} V_{dentro} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = \frac{3E_0}{(K+2)}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E}_{dentro} = \frac{3E_0}{(K+2)}\hat{k}}$$

"O campo elétrico é uniforme dentro da esfera e possui sentido contrário ao campo externo"



Polarização $\vec{P}$

Lembrar que definimos: $\vec{P} = \chi(E)\vec{E}$

também $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ e $\epsilon = K\epsilon_0$.

$\Longrightarrow$ $K\epsilon_0 = \epsilon_0 + \chi$

$$\chi = \epsilon_0(K-1)$$

$\Longrightarrow$ $\vec{P} = \epsilon_0(K-1)\vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0(K-1) \times \frac{3E_0}{K+2}\hat{K}$$

$$\boxed{\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{(K-1)}{(K+2)} E_0 \hat{K}}$$

"Como $K > 1$ $\vec{P}$ possu mesmo sentido que o campo externo $\vec{E_0}$."

Obtenção de σ_p

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{m}$$

No caso $\hat{m} = \hat{r}$ (radial).

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{r} = 3\epsilon_0 \frac{(K-1)}{(K+2)} E_0\, \hat{K}.\hat{r}$$

$$\Longrightarrow \hat{K}\cdot\hat{r} = \cos(\theta)$$

$$\boxed{\sigma_p = 3\epsilon_0 \frac{(K-1)}{(K+2)} E_0 \cos(\theta)}$$

Problema: Resolver o problema de um buraco esférico de raio a dentro de um dielétrico $\underline{K}$.

Dica: O problema é resolvido da mesma forma que o de uma esfera dielétrica. Basta fazer $K_{Fora} = K$ e $K_{dentro} = 1$.

Solução: Vamos considerar que todo o espaço é composto por um dielétrico $\underline{K}$; e que a esfera é uma cavidade de raio $\underline{a}$.

Vamos comparar as condições de contorno com aquelas do problema anterior:

No problema anterior, considerando K_1 e K_2 como dentro e fora, respectivamente:

$$V_1(r,\theta) = A_0' + A_1' r\cos(\theta)$$

$$V_2(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}\cos(\theta)$$

"Mesma simetria $\Rightarrow$ Mesma forma para a solução".

$\Rightarrow$ Considerando que no meio dielétrico $\vec{E} = E_0\hat{k}$

$\Rightarrow A_1 = -E_0$, já levado em consideração acima.

$\Rightarrow A_0 = A_0'$

$$\Rightarrow \begin{cases} -E_0 + \dfrac{B_1}{a^3} = A_1' & (3) \\ \\ -\dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot E_0 - \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \dfrac{2B_1}{a^3} = A_1' & (4) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ainda sem considerar quais são os meios ϵ_2 e ϵ_1:

$$\Rightarrow B_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\, E_0 a^3}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}$$

"mesmo desenvolvimento realizado no problema anterior".

$\Rightarrow$ de (3)

$$A_1' = -E_0 + \frac{B_1}{a^3}$$

$$A_1' = -E_0 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\, E_0}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}$$

$$A_1' = E_0 \left[\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)} - 1 \right] = \left[\frac{\cancel{\epsilon_1} - \epsilon_2 - \cancel{\epsilon_1} - 2\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right] E_0$$

$$A_1' = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0$$

Portanto:

$$\boxed{\begin{aligned} V_{dentro}(r,\theta) &= A_0 - \frac{3\epsilon_2 E_0 r \cos(\theta)}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \\ V_{Fora}(r,\theta) &= A_0 - E_0 r \cos(\theta) + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\, E_0 a^3}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)\, r^2} \cos(\theta) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ Ainda sem levar em consideração quais são os meios ϵ_1 e ϵ_2.

Se $\epsilon_1 = \epsilon_0$ (vácuo) e $\epsilon_2 = K\epsilon_0$

$\Rightarrow$ Para nosso caso particular:

$$\boxed{\begin{aligned} V_{dentro}(r,\theta) &= A_0 - \frac{3K\,E_0}{1+2K} r\cos(\theta) \\ V_{Fora}(r,\theta) &= A_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{(1-K)}{(1+2K)} E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos(\theta) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{dentro} = -\vec{\nabla} V_{dentro}$$

$$\vec{E}_{dentro} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{3K\,E_0\,z}{1+2K}\right)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E}_{dentro} = \frac{3K}{1+2K} E_0\,\hat{k}}$$

Polarização:

Campo fora da cavidade:

$$\vec{E}_F = -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(A_0 - E_0 r\cos(\theta) + \frac{(1-K)}{(1+2K)} E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos(\theta)\right)$$

$$\vec{E}_F = E_0\cos(\theta)\,\hat{r} + \frac{2(1-K)E_0}{(1+2K)}\frac{a^3}{r^3}\cos(\theta)\,\hat{r}$$

$$- E_0 \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\theta} + \frac{(1-K)}{(1+2K)} E_0 \frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\theta}$$

Para $r=a$

$$\vec{E}_F = \left[1 + \frac{2(1-K)}{(1+2K)}\right] E_0\cos(\theta)\,\hat{r} + \left[\frac{(1-K)}{(1+2K)} - 1\right] E_0 \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\theta}$$

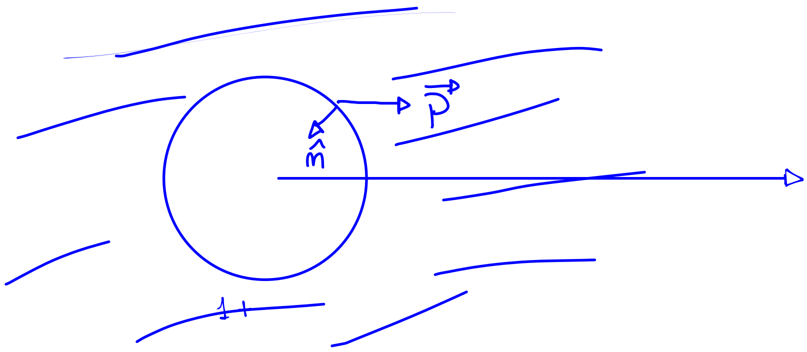
$$\vec{E}_F = \left[\frac{1+\cancel{2K}+2-\cancel{2K}}{1+2K}\right] E_0\cos(\theta)\,\hat{r} + \left[\frac{1-K-1-2K}{1+2K}\right] E_0 \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{E}_F = \left(\frac{3}{1+2K}\right) E_0 \cos(\theta)\,\hat{r} \;-\; \frac{3K}{1+2K} E_0 \,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E}_F \qquad (\epsilon - \epsilon_0) = \chi$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_F = \epsilon_0 (K-1)\vec{E}_F$$

$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ "Neste caso $\hat{n}$ é para dentro da cavidade



3

$\hat{r}\cdot\hat{n} = -1$ e $\hat{\theta}\cdot\hat{n} = -\hat{\theta}\cdot\hat{r} = \text{zero}$

$\Rightarrow$ Só resta o 1º termo:

$$\sigma_p = -\epsilon_0 (K-1)\left(\frac{3}{1+2K}\right) E_0 \cos(\theta)$$

$$\boxed{\sigma_p = -\frac{(K-1)}{(1+2K)}\, 3\epsilon_0 E_0 \cos(\theta)}$$