# Campo Magnético gerado por corremte constamte.

## Considerações históricas

## Definição de campo magnético.

Assim como os demais campos de força (gravitacional e elétrico, por exemplo), o campo magnético é uma medida de força por unidade de "carga magnética".

Mas o que representa a unidade de carga magnética?

Nos casos das interações elétricas e gravitacionais, as características dos corpos responsáveis pela sensibilidade aos campos em questão são únicas - a carga elétrica e a massa, respectivamente. Na interação magnética, no entanto, três características estão envolvidas; a força sobre uma "carga magnética" teste depende da carga elétrica, do módulo da velocidade da carga e também do sentido da velocidade.

$$F_m \propto (q)(v)(\text{sentido de } v)$$

Experimentalmente, uma região de campo magnético define uma direção e sentido para uma bússola. O sentido para onde aponta a bússola pode ser definido como sendo o sentido do campo de indução magnética $\vec{B}$. Experimentos mostram que a força magnética $\vec{F}_m$ sobre uma carga elétrica $q$ com velocidade $\vec{v}$ tem a forma

$$\vec{F}_m \propto q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_m = \text{cte}\; q\vec{v}\times\vec{B}$$

Vimos, nos estudos introdutórios, que no sistema SI a constante é introduzida como parte do campo $\vec{B}$;

$$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \quad \text{no SI}}$$

Como calcular o campo $\vec{B}$ experimentalmente?

Vamos resolver $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$ para $\vec{B}$

Antes vamos rever como realisar esta operação vetorial

Obs: A seguir será apresentado uma revisão do procedimento matemático necessório para isolarmos $\vec{B}$ na equação acima. O leitor com interesse exclusivo nos resultados físicos pode ignorar esta parte e trabalhar com o resultado.

Vamos considerar uma operação geométrica $\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C}$, e vamos resolver para $\vec{C}$.

$A\times\vec{B} = (\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{B}$ Como desenvolver este produto triplo?

vamos desenvolver um produto vetorial triplo do tipo $(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}$.

Utilizando a convenção da soma:

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = \varepsilon_{ijk}(\vec{D}\times\vec{F})^j G^k$$

$$\text{Mas } (\vec{D}\times\vec{F})^j = \varepsilon_{jmn} D^m F^n$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn} D^m F^n G^k$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = -\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} D^m F^n G^k$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = -(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) D^m F^n G^k$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = \delta_{in}\delta_{km} D^m F^n G^k - \delta_{im}\delta_{kn} D^m F^n G^k$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = \delta_{in} D^k F^n G^k - \delta_{im} D^m F^k G^k$$

$$[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}]^i = D^k F^i G^k - D^i F^k G^k$$

Somando as três componentes

$$\left[(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G}\right]^i \hat{e}_i = D^K G^K F^i \hat{e}_i - F^K G^K D^i \hat{e}_i$$

$$\boxed{(\vec{D}\times\vec{F})\times\vec{G} = \vec{D}\cdot\vec{G}\,\vec{F} - \vec{F}\cdot\vec{G}\,\vec{D}}$$

Aplicando esta identidade ao nosso caso:

Temos que:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{B}\cdot\vec{B})\,\vec{C} - (\vec{C}\cdot\vec{B})\,\vec{B}$$

Resolvendo para $\vec{C}$

$$\vec{C} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}} + \frac{\vec{C}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}\,\vec{B}$$

Considerando $\vec{C}$ como incógnita na equação $\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C}$, então

$\dfrac{\vec{C}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}$ é um número não conhecido, pois contém a incógnita.

Então: $$\vec{C} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}} + \mu\,\vec{B}$$

onde $\mu \equiv \dfrac{\vec{C}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}$.

▷◁

No caso queremos resolver $\vec{F}_m = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ para $\vec{B}$.

$$\vec{F}_m \times \vec{v} = q\,(\vec{v}\times\vec{B})\times\vec{v}$$

$$\vec{F}_m \times \vec{v} = q\,(\vec{v}\cdot\vec{v}\,\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{v}\,\vec{v})$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v}\,\vec{B} = \frac{\vec{F}_m\times\vec{v}}{q} + \vec{B}\cdot\vec{v}\,\vec{v}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_m\times\vec{v}}{q\,v^2} + \underbrace{\frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{v^2}}_{\text{número não conhecido.}}\,\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{F}_m\times\vec{v}}{q\,v^2} + \mu\,\vec{v}}$$

Deste resultado conclui-se que uma medida da força magnética, com $q$ e $v$ conhecidos, não é suficiente para obter $\vec{B}$ pois $\mu$ não é conhecido.

Desafio: Explicar esta impossibilidade com argumentos físicos e geométricos.

É possível obter-se $\vec{B}$ com 2 medidas diferentes. Particularmente com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ perpendiculares, tal que $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$.

Medida 1 $\longrightarrow$ $\vec{F}_1$, $\vec{v}_1$ e $\mu_1$

Medida 2 $\longrightarrow$ $\vec{F}_2$, $\vec{v}_2$ e $\mu_2$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{v}_1}{q v_1^2} + \mu_1 \vec{v}_1 \qquad (1)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_2 \times \vec{v}_2}{q v_2^2} + \mu_2 \vec{v}_2 \qquad (2)$$

Tomando o produto escalar de cada equação com $\vec{v}_1$.

$$\vec{B}\cdot\vec{v}_1 = \cancel{\frac{\vec{F}_1 \times \vec{v}_1}{q v_1^2}\cdot\vec{v}_1}^{\text{zero}} + \mu_1 v_1^2$$

$$\vec{B}\cdot\vec{v}_1 = \frac{\vec{F}_2 \times \vec{v}_2}{q v_2^2}\cdot\vec{v}_1 + \cancel{\mu_2 \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}^{\text{zero}}$$

Então $\mu_1 v_1^2 = \dfrac{\vec{F}_2 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{q v_2^2}$

$$\mu_1 = \frac{\vec{F}_2 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{q v_1^2 v_2^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{v}_1}{q v_1^2} + \left(\frac{\vec{F}_2 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{q v_1^2 v_2^2}\right)\vec{v}_1}$$

*Significa que é possível determinarmos a intensidade e o sentido do campo de indução magnética realizando dois experimentos para as forças sobre uma carga q ; em velocidades perpendiculares.

Vale lembrar que estamos construindo formas de definirmos a indução magnética $\vec{B}$ através de experimentos. Efeitos como força sobre um fio condutor com corrente ou torque sobre uma bobina com corrente podem ser utilizados para este fim.

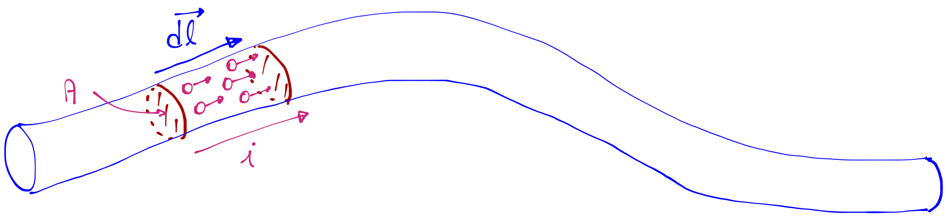
## Força sobre um fio condutor com corrente.

A expressão

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

nos dá a força sobre uma carga $q$ com velocidade $\vec{v}$. Natural que a força em um elemento $d\vec{l}$ de um fio com corrente $i$ seja a soma das forças em cada carga dentro de $d\vec{l}$.

⇒ Vamos considerar um fio com corrente $i$.




A força em uma das cargas $q$ é

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (1)$$

Se temos $n$ cargas por unidade de volume, com velocidade $\vec{v}$, então a força total sobre o elemento de comprimento $d\vec{l}$ e área transversal $A$ será

$$d\vec{F} = (\text{Nº de cargas dentro do volume}) \times \vec{F}_q = n\,A\,dl\,q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Mas $n A dl q$ = Carga total dentro do volume; portanto

definindo $n A dl q \equiv \Delta Q$

$$d\vec{F} = \Delta Q\, \vec{v} \times \vec{B} \qquad (2)$$

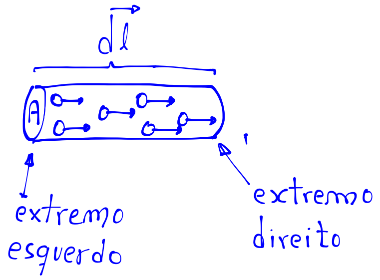
Usando $\vec{v} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$ resulta que

$$d\vec{F} = \Delta Q \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$$

Rearranjando,

$$d\vec{F} = \frac{\Delta Q}{dt}\, d\vec{l} \times \vec{B} \qquad (3)$$

Notar que $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$ ; portanto, $dt$ corresponde ao tempo necessário para uma carga percorrer o comprimento $d\vec{l}$. Se considerarmos uma carga no extremo esquerdo do elemento de linha representado abaixo




então durante o tempo $dt$ a carga do extremo percorre todo o comprimento $d\vec{l}$ ; portanto, neste mesmo tempo todas as cargas $\Delta Q$ dentro de $dV = A\,dl$ ultrapassam a área $A$ no extremo direito de $d\vec{l}$. Então $\frac{\Delta Q}{dt}$, na Equação (3) acima, corresponde à corrente $i$ no circuito; segue que

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \times \vec{B} \qquad (4)$$

Através da relação (4) podemos obter a força total sobre um circuito de linha com corrente $i$;

$$\vec{F} = \oint_C d\vec{F} = \oint_C i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$ , onde a integral deve ser tomada sobre um circuito fechado.

Como a corrente é a mesma em todo o circuito,

$$\vec{F} = i \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

Para um campo magnético uniforme, $\vec{B} = B_0 \hat{u}$, por exemplo,

$$\Rightarrow \vec{F} = i \oint_C d\vec{l} \times B_0 \hat{u} \; ;$$

Denotando $d\vec{l}$ em coordenadas retangulares;

$$d\vec{l} = dl_x \hat{\imath} + dl_y \hat{\jmath} + dl_z \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = i \oint_C \left( dl_x \hat{\imath} + dl_y \hat{\jmath} + dl_z \hat{k} \right) \times B_0 \hat{u}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = i B_0 \left\{ \oint_C dl_x \, \hat{\imath} \times \hat{u} + \oint_C dl_y \, \hat{\jmath} \times \hat{u} + \oint dl_z \, \hat{k} \times \hat{u} \right\}$$

Como $\vec{B}$ é uniforme $\Rightarrow$ $\hat{\imath} \times \hat{u}$, $\hat{\jmath} \times \hat{u}$ e $\hat{k} \times \hat{u}$ são constantes; segue que

$$\vec{F} = i B_0 \left\{ \hat{\imath} \times \hat{u} \oint_C dl_x + \hat{\jmath} \times \hat{u} \oint_C dl_y + \hat{k} \times \hat{u} \oint_C dl_z \right\}$$

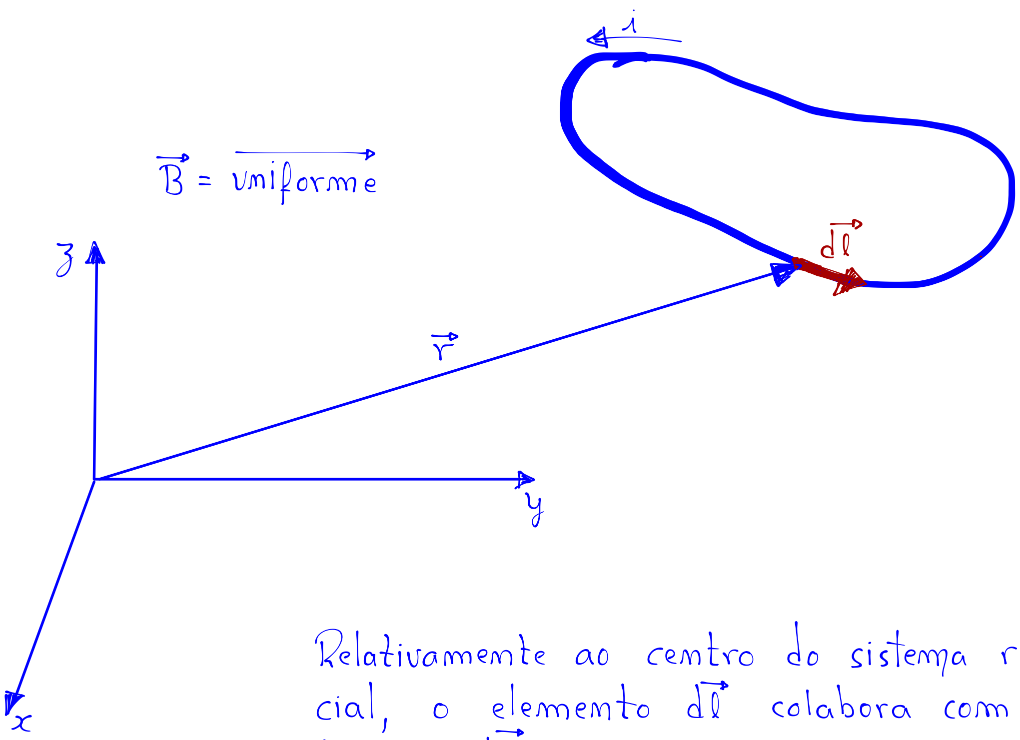
$\Rightarrow$ Para um circuito fechado $\oint_C dl_x = \oint_C dl_y = \oint_C dl_z = \text{zero}$.

Portanto, $\boxed{\vec{F} = \vec{\text{zero}}.}$

Resumido: Um circuito completo imerso em um campo magnético uniforme sente uma força resultante nula.

# Torque sobre um circuito completo com corrente

Vamos considerar um circuito completo com corrente $i$, em um campo magnético, como ilustrado abaixo.




Relativamente ao centro do sistema referencial, o elemento $d\vec{l}$ colabora com um torque $d\vec{\tau}$;

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\Longrightarrow d\vec{F} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{\tau} = i\, \vec{r} \times \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \oint_C i\, \vec{r} \times \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

$$\vec{\tau} = i \oint_C \vec{r} \times \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right).$$

Desenvolvendo o integrando (usando a convenção de soma e o símbolo de Levi-Civita ($\varepsilon_{ijk}$)):

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = \varepsilon_{ijk}\, r^j\, (d\vec{l}\times\vec{B})^k$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = \varepsilon_{ijk}\, r^j\, \varepsilon_{kmn}\, dl^m\, B^n$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{mnk}\, r^j dl^m B^n$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\, r^j dl^m B^n$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = \delta_{im}\delta_{jn}\, r^j dl^m B^n - \delta_{in}\delta_{jm}\, r^j dl^m B^n$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = \delta_{im}\, r^j B^j dl^m - \delta_{in}\, r^j dl^j B^n$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^i = r^j B^j dl^i - r^j dl^j B^i$$

Somando as componentes:

$$\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B}) = \vec{r}\cdot\vec{B}\; d\vec{l} - \vec{r}\cdot d\vec{l}\; \vec{B}$$

Considerando a componente $\underline{x}$:

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^x = \cancel{x B_x dl_x} + y B_y dl_x + z B_z dl_x$$

$$- \cancel{x\, dl_x B_x} - y\, dl_y B_x - z\, dl_z B_x$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]^x = y\, dl_x B_y - y\, dl_y B_x + z\, dl_x B_z - z\, dl_z B_x$$

"Similar para as demais componentes"

Vamos utilizar o resultado acima para calcularmos a componente $\underline{x}$ do torque $(\tau_x)$

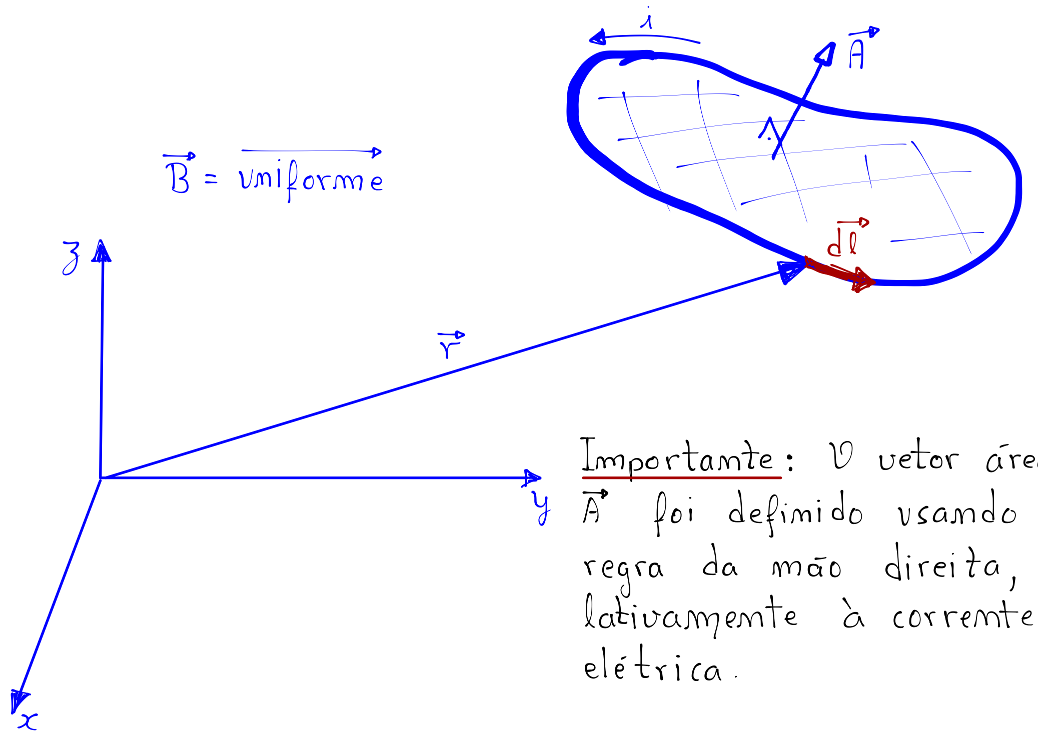
| |
|---|
| Obs: Daqui em diante façamos $dl_x \equiv dx$ ; $dl_y \equiv dy$ e $dl_z \equiv dz$ |

$$\tau_x = i \oint_c \left[\vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})\right]_x$$

$$\tau_x = i \oint_c \left[y\, dx\, B_y - y\, dy\, B_x + z\, dx\, B_z - z\, dz\, B_x\right]$$

$$T_x = i\left\{ B_y \oint_c y(x)\,dx - B_x \oint_c y\,dy + B_z \oint_c z(x)\,dx - B_x \oint_c z\,dz \right\}$$

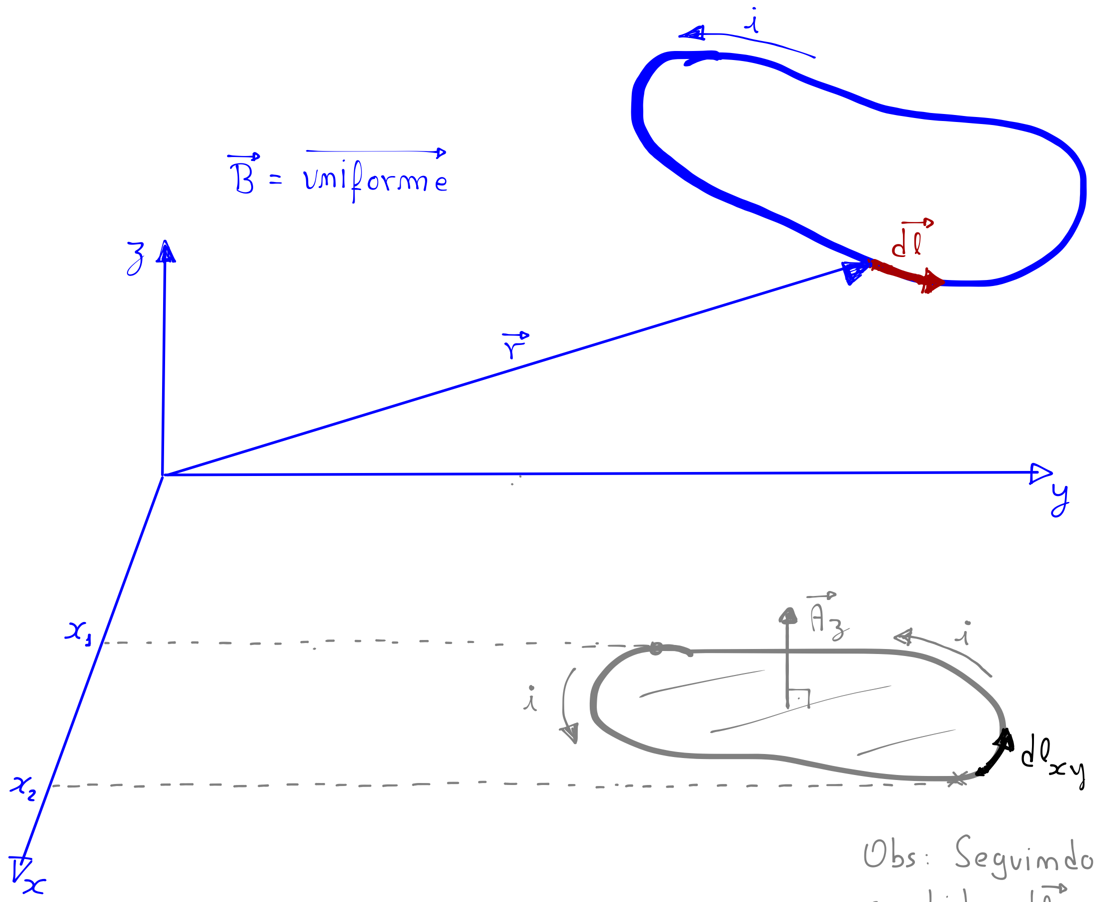
*Neste ponto vamos verificar o que cada integral representa; para isso vamos utilizar a figura abaixo:




Importante: O vetor área $\vec{A}$ foi definido usando a regra da mão direita, relativamente à corrente elétrica.

$\oint_c y(x)\,dx \Longrightarrow$ Corresponde a uma soma das componentes $x$ dos elementos de circuito $\vec{dl}$ multiplicadas por suas componentes $y$ de posição.

$\Longrightarrow$ Este cálculo equivale ao cálculo da projeção do circuito no plano $xy$




Obs: Seguindo o sentido $\vec{dl}$, mesmo da corrente, $\Rightarrow$ esta integral dará um valor negativo pois vai de $x_1 \rightarrow x_2$ por baixo e volta de $x_2 \rightarrow x_1$ por cima. Resulta na área delimitada pela projeção $(-A_z)$.

$$\Rightarrow \oint_C y(x)\,dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_1} y(x)\,dx}_{\text{Para fechar o circuito}}$$

$\Rightarrow$ Com um pouco de atenção percebe-se que trata-se da área da projeção em $xy$. Se denotarmos esta área por seu vetor normal:

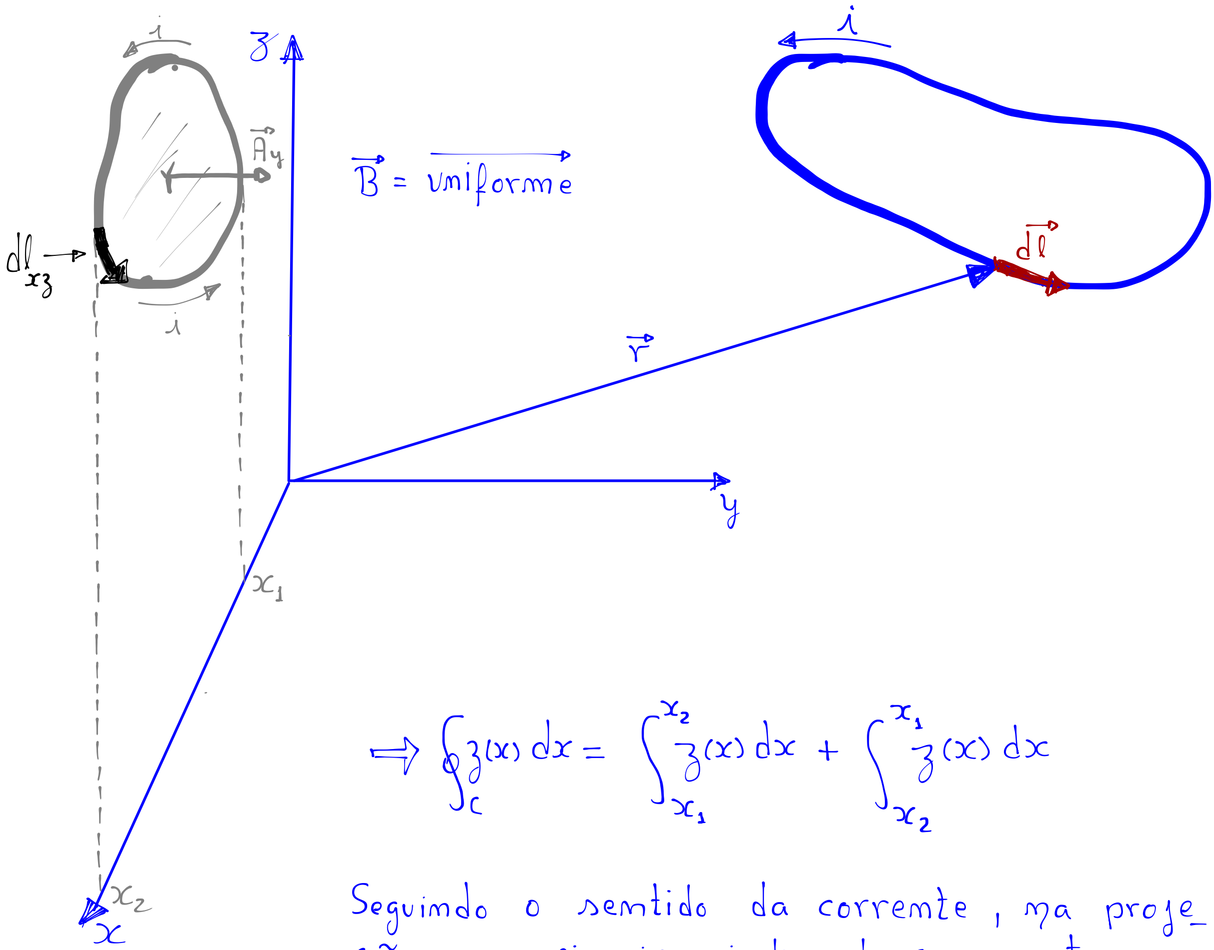
$A_{xy} \Longrightarrow A_z \hat{k}$ "pois uma área é vetorialmente representada por seu vetor normal".

Então:

$$\boxed{\oint_C y(x)\,dx = -A_z}\ , \text{ negativa.}$$

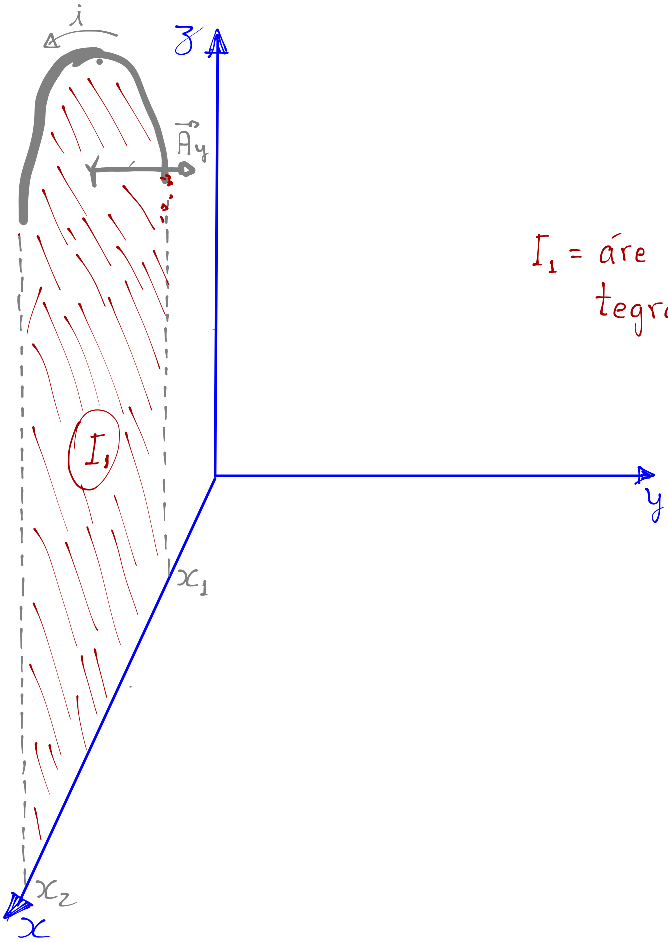
# Análise da integral $\oint_c z(x)\,dx$

Projeção:




$$\Rightarrow \oint_c z(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} z(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_1} z(x)\,dx$$

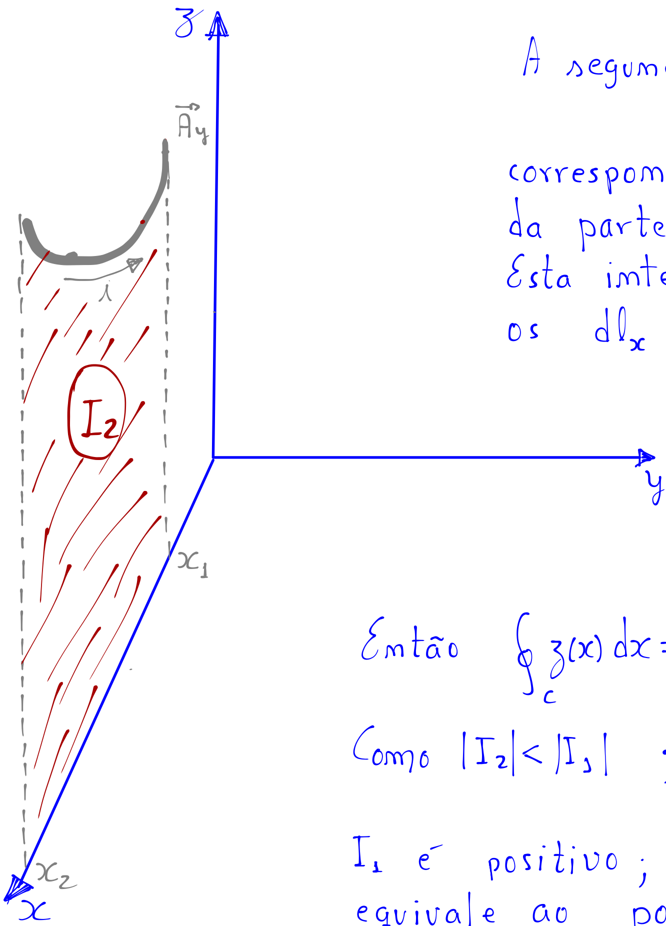
Seguindo o sentido da corrente, na projeção, a primeira integral representa a área abaixo do seguimento $x_1 \longrightarrow x_2$ como ilustrado abaixo (próxima página)




$I_1$ = áre resultante da integral

$$\int_{x_1}^{x_2} z(x)\,dx\,,$$

Positiva.




A segunda integral $\int_{x_2}^{x_1} z(x)\,dx$, corresponde à área abaixo da parte inferior $(x_2 \longrightarrow x_1)$. Esta integral é negativa pois os $dl_x$ são negativos.

Então $\oint_c z(x)\,dx = I_1 + I_2$.

Como $|I_2| < |I_1|$ ; $I_2$ é negativo e

$I_1$ é positivo; então a soma equivale ao positivo da área delimitada, ou seja,

$$\boxed{\oint_c z(x)\,dx = A_y}$$

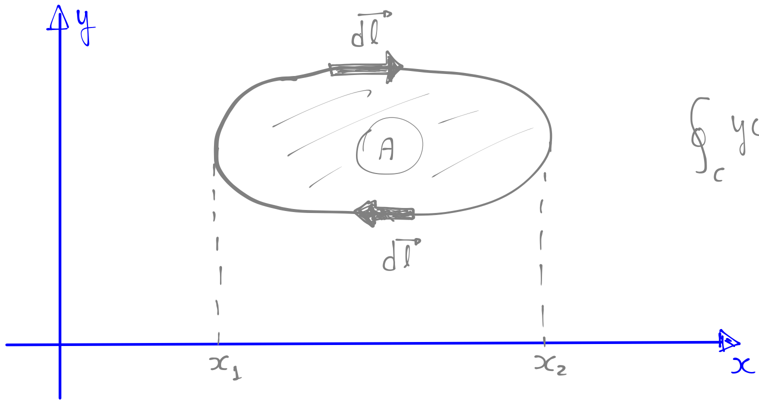
Análise das integrais $\oint_C y\,dy$ e $\oint_C z\,dz$.

Nos casos anteriores tínhamos integrais cujos integrandos são funções de outra coordenada; por exemplo,

$\oint_C y(x)\,dx$ ; significa uma integral no circuito fechado de uma função de $x$.

$$\Rightarrow \oint_C y(x)\,dx = \text{Área delimitada.}$$

Note que é algo do tipo




$\oint_C y(x)\,dx = A$ ,

ou seja, o integrando está em uma dimensão $(y)$ e o incremento $(dx)$ em outra $(x)$.

Uma integral do tipo $\oint_C x\,dx$ conta com integrando e incremento na mesma dimensão $(x)$. Para uma integral fechada isso sempre dá zero.

Exemplo:

$$\oint_C x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \int_{x_2}^{x_1} x\,dx$$

$$\oint_C x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_2}^{x_1}$$

$$\oint_c x\,dx = \cancel{\frac{x_2^2}{2}} - \cancel{\frac{x_1^2}{2}} + \cancel{\frac{x_1^2}{2}} - \cancel{\frac{x_2^2}{2}} = \text{zero}.$$

Portanto, $\oint_c y\,dy = \oint_c z\,dz = \text{zero}$

Voltando à componente $x$ do torque:

$$\tau_x = i\left\{ B_y \underbrace{\oint_c y(x)\,dx}_{-A_z} - B_x \underbrace{\oint_c y\,dy}_{\text{zero}} + B_z \underbrace{\oint_c z(x)\,dx}_{+A_y} - B_x \underbrace{\oint_c z\,dz}_{\text{zero}} \right\}$$

$$\tau_x = i\left(-B_y A_z + B_z A_y\right) = i\left(A_y B_z - A_z B_y\right)$$

$\Rightarrow$ A parte entre parênteses corresponde à componente $x$ do produto vetorial entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$[\vec{A}\times\vec{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$\tau_x = i\,[\vec{A}\times\vec{B}]_x$$

Aplicando a simetria do sistema retangular:

$$\tau_y = i\,[\vec{A}\times\vec{B}]_y$$

$$\tau_z = i\,[\vec{A}\times\vec{B}]_z$$

O torque total é $\vec{\tau} = \tau_x\hat{\imath} + \tau_y\hat{\jmath} + \tau_z\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = i\left\{ [\vec{A}\times\vec{B}]_x\,\hat{\imath} + [\vec{A}\times\vec{B}]_y\,\hat{\jmath} + [\vec{A}\times\vec{B}]_z\,\hat{k} \right\}$$

$$\vec{\tau} = i\,\vec{A}\times\vec{B}$$

Definindo $i\vec{A} \equiv \vec{\mu}$ como momento magnético de uma espira de corrente;

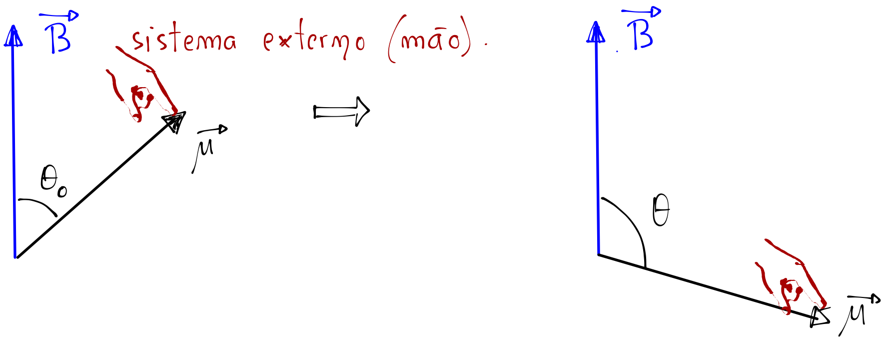
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

⇒ Esta relação "diz" que: A situarmos um loop de corrente em um campo magnético, o circuito sofrerá um torque no sentido de alinhar o momento magnético ($\vec{\mu} = i\vec{A}$) com o campo.

Naturalmente, se o Torque leva o sistema a uma configuração de estabilidade final (o alinhamento), então, quando $\vec{\mu}$ não está alinhado com $\vec{B}$, significa que o sistema está em um estado de energia superior ao do alinhamento.

⇒ Vamos, então, calcular a energia de acoplamento entre $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$.

"Sabemos" que energia é uma grandeza relativa (fato discutido excessivamente e que precisa ser entendido claramente. ⇒ Um aluno de física ou áreas afins não pode se formar sem levar consigo este conceito claramente); então só o que calculamos (ou observamos) são variações de energias. Sendo assim, vamos calcular a variação de energia devido à variação do ângulo entre $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$. Para isso, basta calcularmos o trabalho que um agente externo realiza para tirar o sistema de uma situação com $\theta_0$ e levar para uma configuração com $\theta$ final.



⇒ O sistema externo gasta energia quando torce o circuito no sentido de aumentar $\theta$ e recebe energia quando é empurrado por $\vec{\mu}$ - indo para ângulos menores. Quando o sistema externo gasta energia ⇒ o sistema composto por $\vec{B}$ e $\vec{\mu}$ recebe esta energia; quando o sistema externo recebe energia ⇒ o sistema $\vec{B}/\vec{\mu}$ perde.

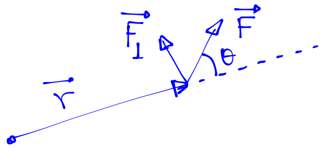
Vamos considerar que o sistema externo ($\equiv$ mão) empurre $\vec{\mu}$ por um ângulo $d\theta$, quanto trabalho ($dw$) realizaria?

Vamos considerar que a mão empurra o circuito, apoiando o dedo a uma distância $\underline{r}$ do eixo de rotação (o centro geométro da bobina). Então o trabalho $\underline{dw}$ será

$$dw = F_\perp r\, d\theta$$ ⇒ $F_\perp$ = força perpendicular ao raio $\underline{r}$

$r\,d\theta$ = distância percorrida pelo ponto de apoio.

Em função da componente principal da força, temos que




$$F_\perp = F\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$dw = F_\perp r\, d\theta \quad , \text{ mas } \quad F_\perp . r = \tau$$

$$dw = \tau\, d\theta$$

$$\Delta W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \mu B\,\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta$$

$$\Delta W = -\mu B \left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right]$$

$$\Delta W = -\mu B \cos(\theta) + \mu B \cos(\theta_0)$$

Note que $\mu B \cos(\theta_0) = cte.$

Se $\Delta W > 0$, então o sistema externo perdeu energia pois trabalhou positivamente. Se $\Delta W < 0 \Longrightarrow$ o contrário ocorre.

Portanto $\Delta W = \Delta E$, onde $\Delta E$ = variação na energia do sistema "empurrado".

$$\Longrightarrow \Delta E = -\mu B \cos(\theta) + \mu B \cos(\theta_0)$$

Podemos escolher um $\theta_0$ como referência fixa, tal que $\Delta W$ represente sempre o trabalho da força externa necessário para levar o sistema de $\theta_0$ até $\theta$.

$\Longrightarrow$ define-se, comumente, $\theta_0 \equiv 90°$. Então,

$$\Delta E = -\mu B \cos(\theta)$$

ou $\boxed{\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$ "relativa a $\theta_0 = 0°$".

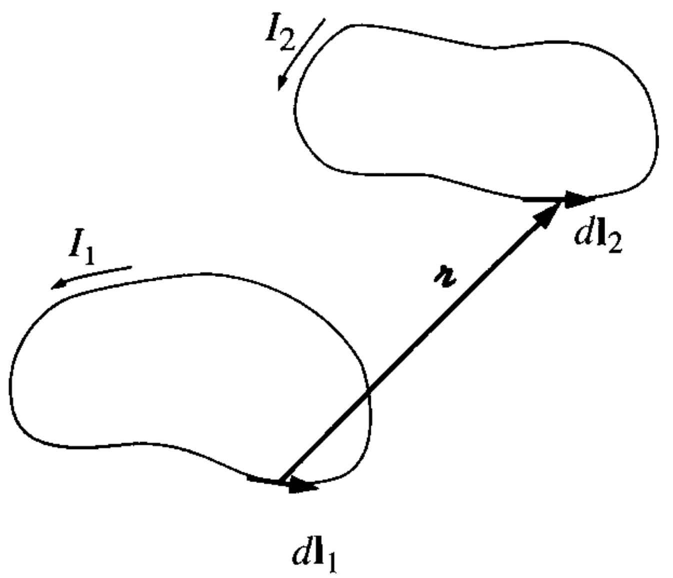
# A lei de Biot-Savart

Em 1820, poucas semanas após Oersted anunciar sua descoberta de que correntes elétricas produzem campo magnético, Ampère apresentou o resultado de uma série de experimentos que puderam ser expressos em linguagem matemática como

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \left[ d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1)$$

Obs: Texto retirado do livro Reitz-Milford

A relação acima pode ser ilustrada como segue:




Se o circuito 2 sente uma força a distância, proveniente do circuito 1, então se diz que o circuito 2 sente o campo de força ($\equiv \vec{B}$). Separando, na equação acima, tudo aquilo que está associado com o circuito 1, temos que

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint_2 d\vec{l}_2 \times \left[ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \qquad (2)$$

O fator entre colchetes corresponde ao campo em um ponto $\vec{r}_2$ devido a todo o circuito 1.

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \oint_1 \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \qquad (3)$$

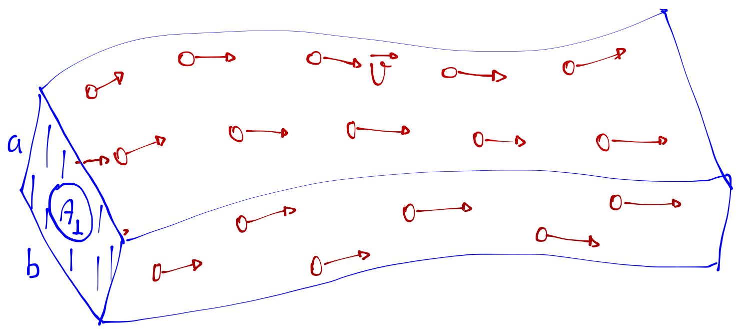
$$\Rightarrow \quad d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad (4)$$

As equações acima, em particular a Eq. (4), demontam campo magnético produzido por correntes através de linhas (fios com corrente elétrica). Como representar o caso quando o fluxo de cargas elétricas acontecer através de uma superfície ou de um volume?

# Densidade de corrente

Até o momento tratamos de correntes confinadas em um fio, onde utilizamos a forma do fio (integral em $d\vec{l}$). Contudo, quando o fluxo de carga é volumétrico, não contamos com a possibilidade de vincularmos o sentido da corrente com a geometria do material. Neste caso devemos utilizar a velocidade das cargas ($\vec{v}$) como o definidor da corrente em um ponto do material.

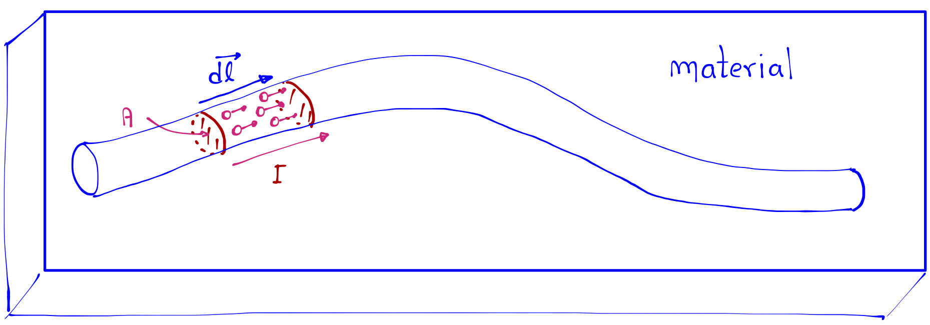
Quando lidamos com corrente I através de uma área transversal (tradicional) a densidade de corrente $\vec{J}$ é obtida dividindo a corrente $\vec{I}$ pela área transversal $A_\perp$, como abaixo



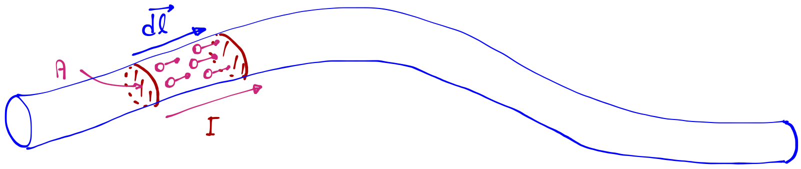

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{I}}{ab}$$

$\Rightarrow \vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\hat{u}$ , onde $\Delta Q$ é a quantidade de carga que passa pela área transversal $A_\perp$ e $\Delta t$ o tempo para a passagem de $\Delta Q$.

Vamos imaginar que um fio faz parte de um material maior:



Direcionando nossa atenção apenas à porção do material denotada pelo formato do fio:




$$\vec{dl} = dl\,\hat{u}$$

$$\vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\hat{u} \qquad \Delta t = \frac{\Delta l}{v}$$

$$\vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta l} v\,\hat{u}$$

Mas $v\hat{u} = \vec{v}$

$$\vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta l}\vec{v}$$

Note que $\frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lambda$ (densidade linear de carga no fio)

$\Rightarrow$ Dividindo ambos os lados pela área transversal $A_\perp$

$$\frac{\vec{I}}{A_\perp} = \frac{\Delta Q\,\vec{v}}{\Delta l\,A_\perp}$$

$$\frac{\vec{I}}{A_\perp} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}\vec{v}$$

$\Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \rho \Rightarrow$ densidade volumétrica de carga elétrica

$$\Rightarrow \vec{J} \equiv \frac{\vec{I}}{A_\perp} = \rho\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}}$$

Note que $\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$ ; queremos reescrever a equação

$$d\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}$$ , em função de $\vec{v}$

em vez de $d\vec{\ell_1}$.

$$\Rightarrow d\vec{\ell}_1 = \vec{v}_1 dt \qquad (\times I)$$

$$I d\vec{\ell}_1 = I \vec{v}_1 dt$$

$$I\, d\vec{\ell}_1 = I\, dt\, \vec{v}_1$$

$$I\, dt = dQ$$

$$I d\vec{\ell}_1 = dQ\, \vec{v}_1$$

mas $dQ = \rho\, dV_1$

$$\boxed{I d\vec{\ell}_1 = \rho \vec{v}_1 dV_1 \quad \text{ou} \quad I d\vec{\ell}_1 = \vec{J}_1 dV_1}$$

Podemos, então, escrever $d\vec{B}$ nas formas

$$d\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\, d\vec{\ell_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \qquad \text{(Fio)}$$

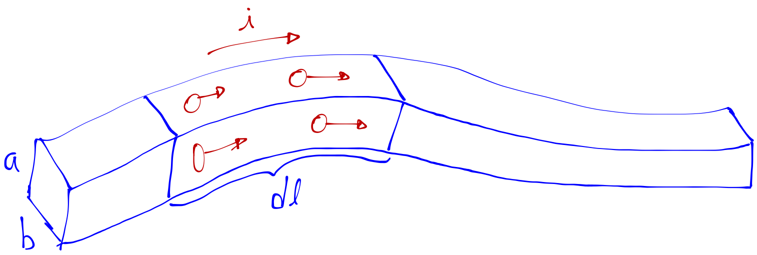
$$d\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho\, dV_1\, \vec{v_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \qquad \text{(Volume)}$$

ou $$d\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dV_1\, \vec{J_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \qquad \text{(Volume)}$$

## Fluxo de carga por uma superfície

Vimos, no caso volumétrico, que $\vec{J} = \rho \vec{v}$.

Esta relação pode ser ilustrada como segue:

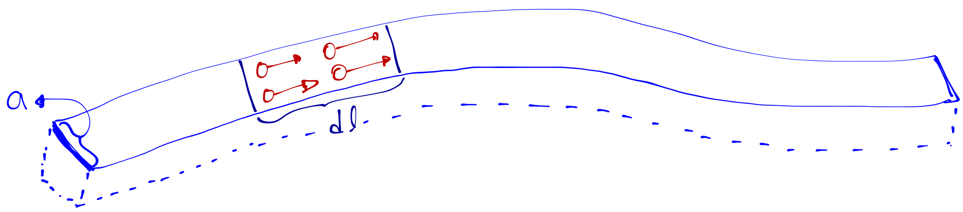



$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$\vec{J} = \frac{\Delta Q}{a b d l} \vec{v}$$

Notar que $\vec{J} = \dfrac{\vec{I}}{ab}$

$\Longrightarrow \vec{J} \cdot b \equiv \vec{j}$ = densidade no fio independente de $b$. Significa algo como ilustrado abaixo.




Como se pudéssemos desconsiderar a dimensão $b$; afinal, a corrente pode ser obtida multiplicando $\vec{j}$ pelo comprimento da fita.

$$\vec{I} = \vec{j}\, a$$

$$\vec{I} = \vec{J}\, b a$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{I}}{\cancel{ab}} \cancel{ab}$$

Também

$$\vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \vec{v} = \frac{\sigma a \Delta l}{\Delta l} \vec{v}$$

$$\vec{I} = \sigma a \vec{v}$$

$$\boxed{\frac{\vec{I}}{a} = \vec{j} = \sigma \vec{v}}$$

Segue, portanto, que para uma superfície:

$$I\,d\vec{l} = \frac{dq}{dt}\,d\vec{l}$$

Mas $dq = \sigma\, dA$

$$I\,d\vec{l} = \sigma\, dA\, \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\boxed{I\,d\vec{l} = \sigma\, \vec{v}\, dA}$$

Adicionalmente, $\boxed{I\,d\vec{l} = \vec{J}\, dA}$

Então, para correntes em superfícies, podemos fazer a seguinte substituição:

$$d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\, d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad \text{(Fio)}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma\, \vec{v} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\, dA}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad \text{(Superfície)}$$

ou $$d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\, dA}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad \text{(Superfície)}$$

Obs: $\vec{J}$ é a densidade de corrente por unidade de comprimento perpendicular à velocidade das cargas no ponto específico na região de superfície.

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \qquad (\text{fio})$$

$$\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\rho(r_1)\, \vec{v_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \, dV_1 \qquad (\text{volume})$$

$$\vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{J_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \, dV_1 \qquad (\text{volume})$$