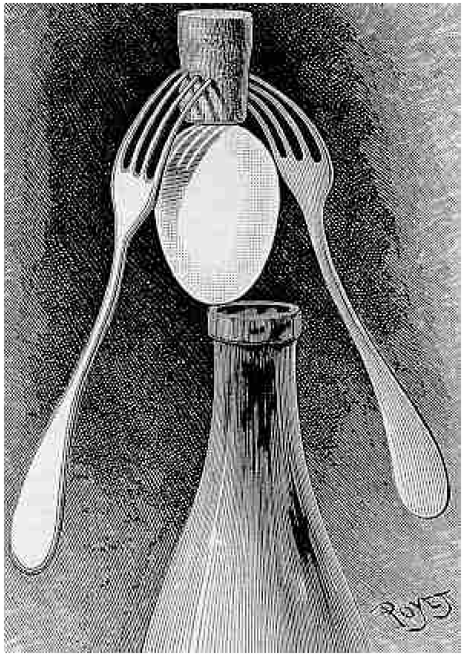
1ºAula – Cap. 09

Sistemas de partículas

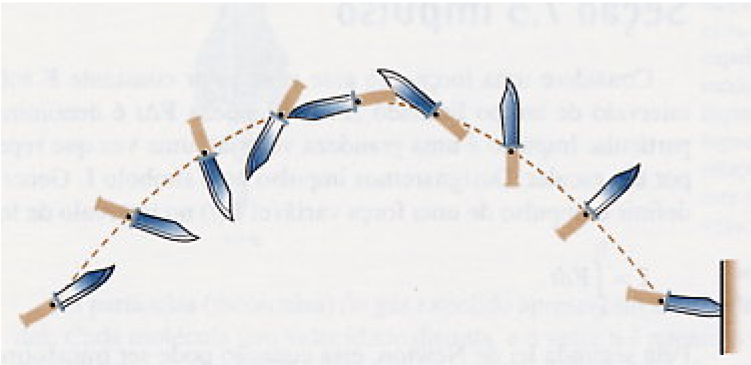


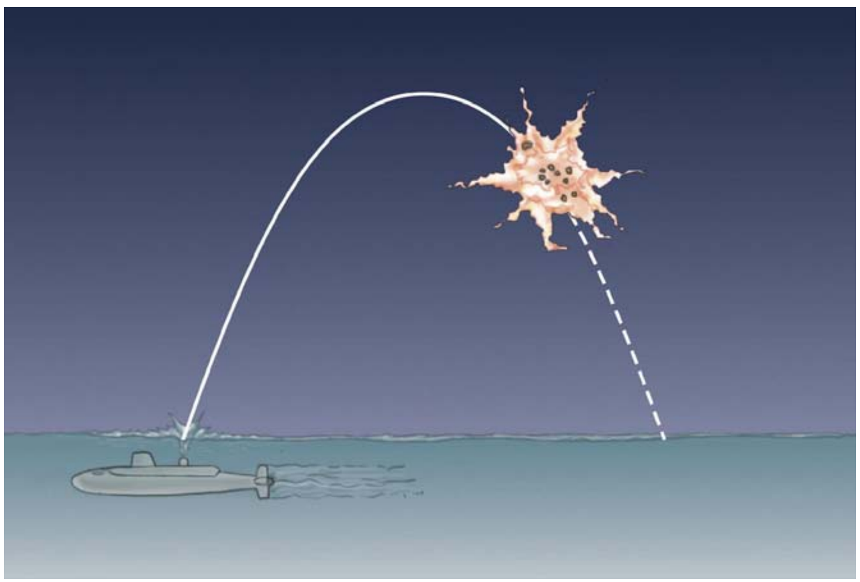
- **Introdução**
- **Determinação do Centro de Massa,**
- **Centro de massa e simetrias,**
- **2ª Lei de Newton/sistema de partículas.**
- **Velocidade/Aceleração do centro de massa**

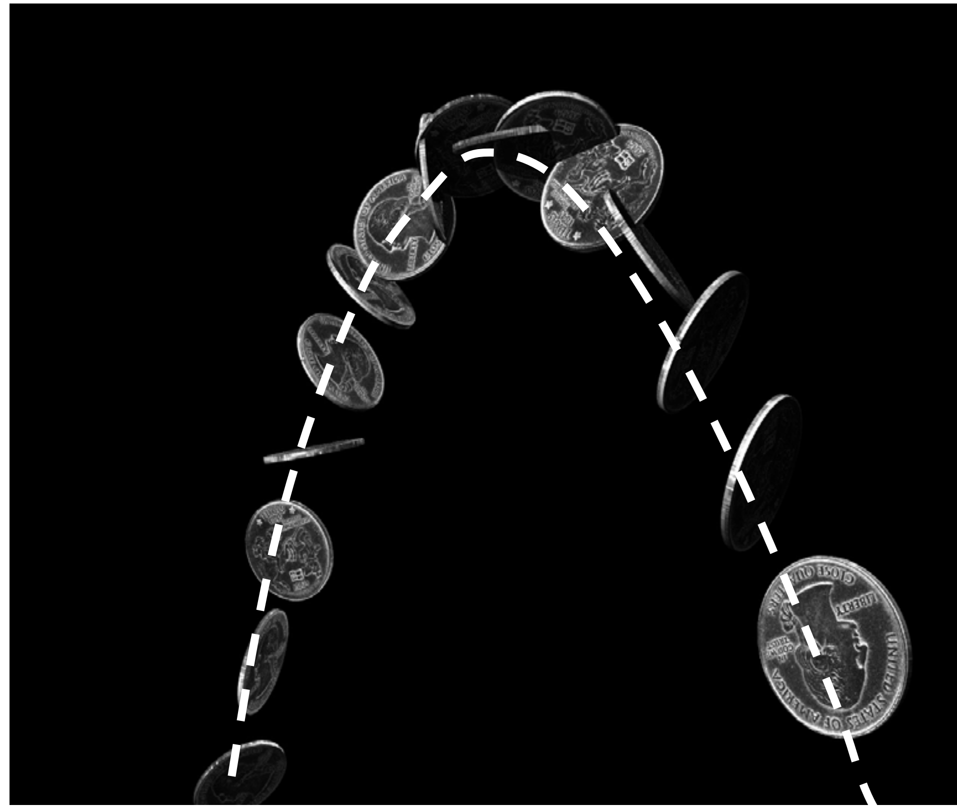
Referência:

- **Halliday**, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1. Cap. 09 da 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- **Tipler**, Paul. Física, Vol 1 cap. 08. 4ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

Movimento do Centro de Massa

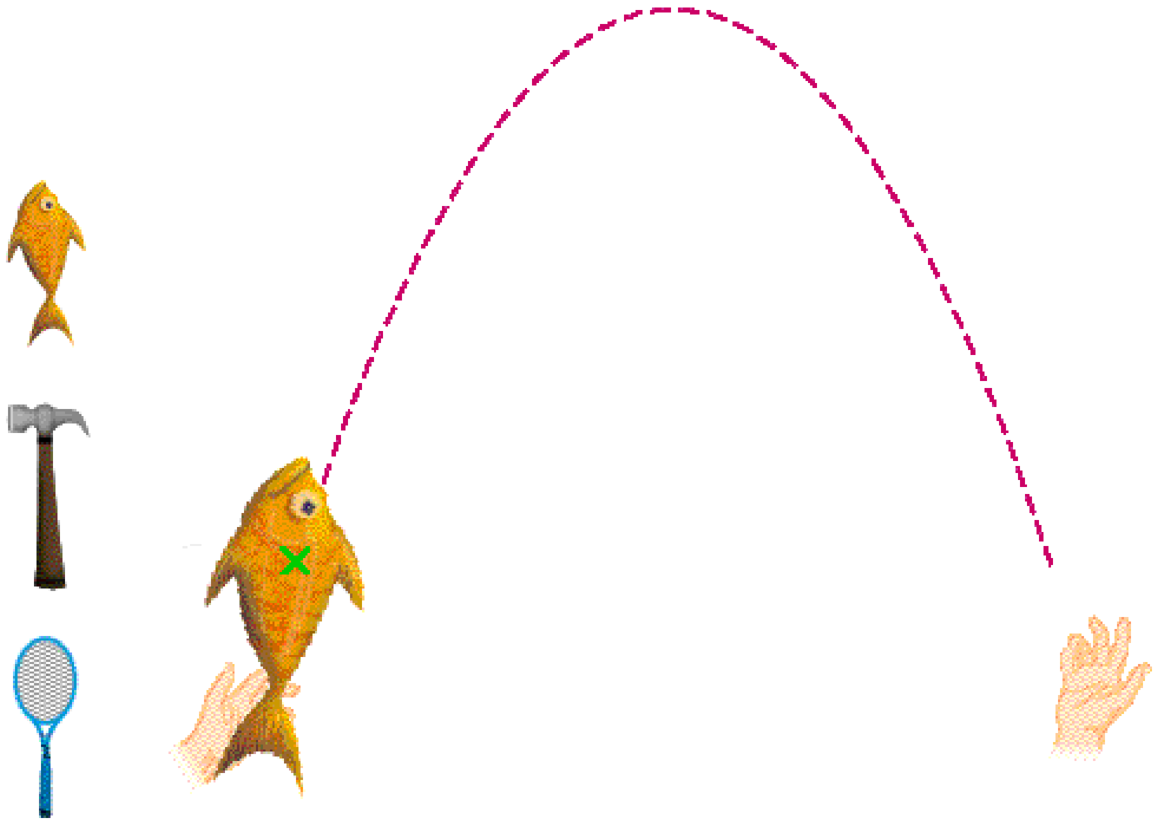






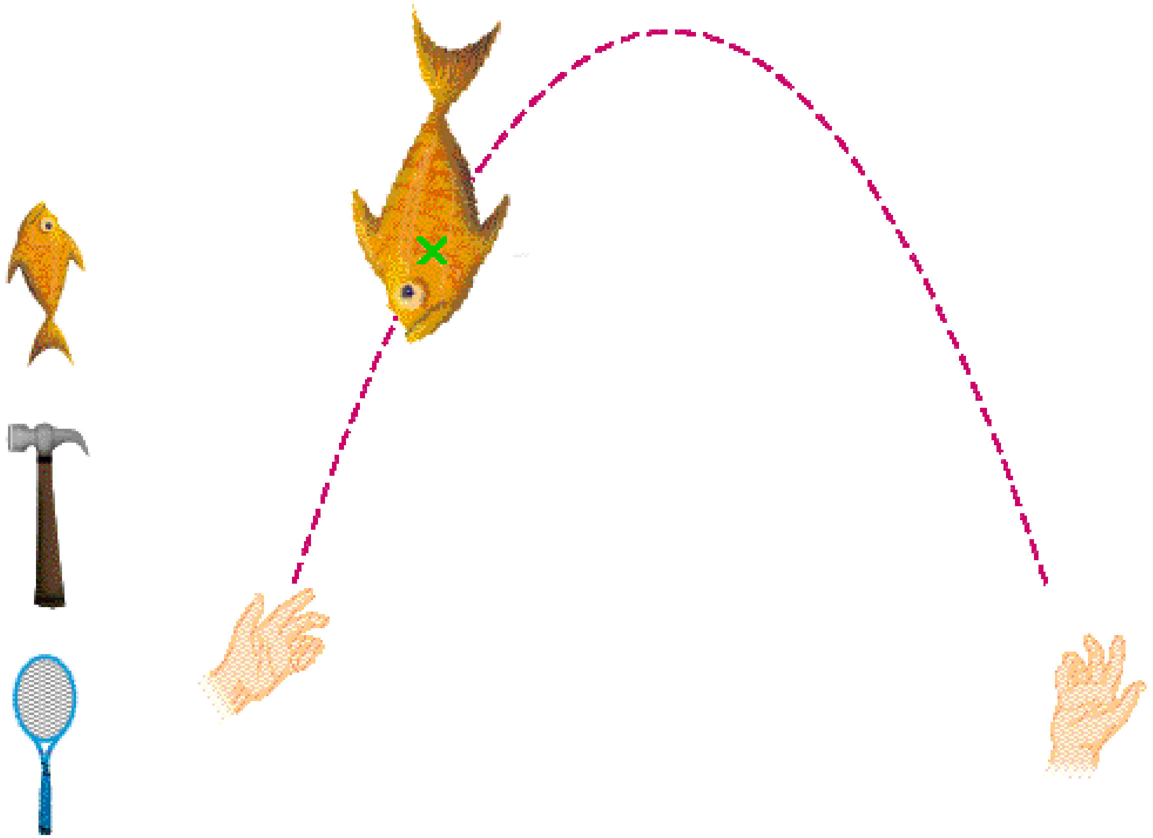
O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o **centro de massa descreve uma parábola** como uma partícula.

Movimento do Centro de Massa



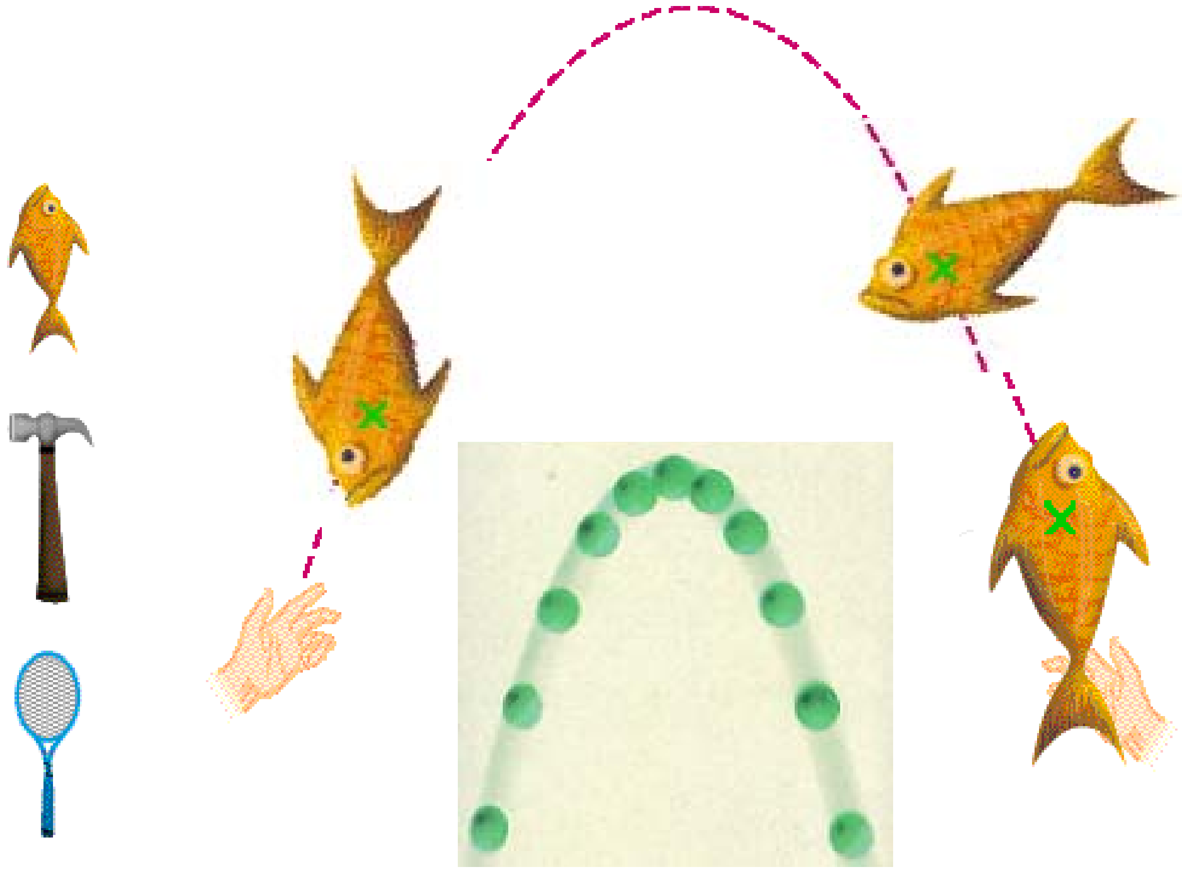
O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o **centro de massa descreve uma parábola** como uma partícula.

Movimento do Centro de Massa



O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o **centro de massa descreve uma parábola** como uma partícula.

Movimento do Centro de Massa

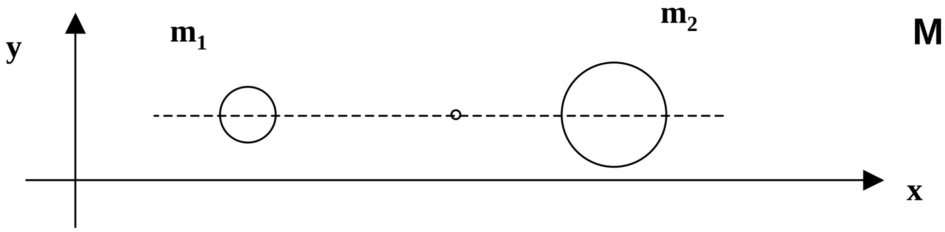


O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o **centro de massa descreve uma parábola** como uma partícula.

Centro de Massa

Há um ponto, denominado centro de massa do sistema, que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele, e as forças externas atuantes sobre o sistema estivessem agindo exclusivamente sobre ele.

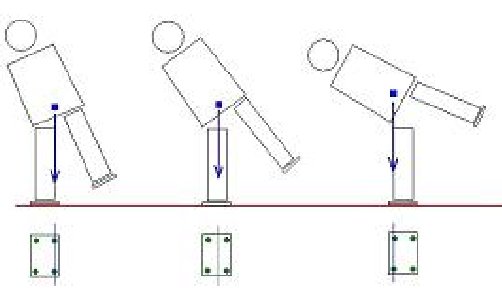
O movimento de qualquer corpo, ou qualquer sistema de partículas, pode ser descrito em termos do movimento do centro de massa.



$M = m_1 + m_2$

A coordenada do centro de massa é X_{cm} dada por:

$$X_{cm} = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}$$



Cálculo do centro de massa

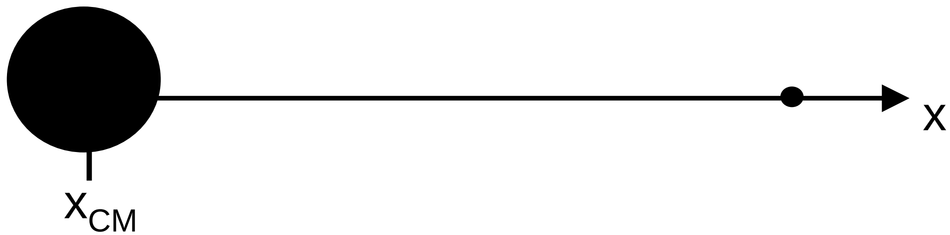
$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

Média ponderada das posições, tendo as massas como pesos

Exemplos:

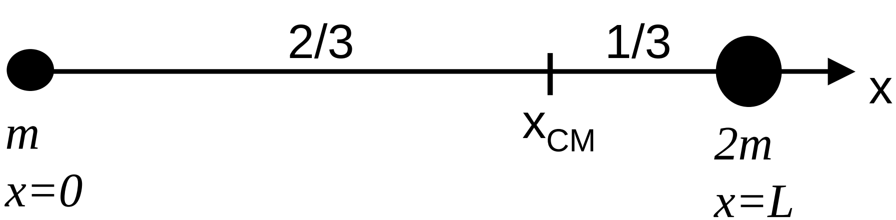
(a) $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

(b) $m_1 >> m_2 \Rightarrow x_{CM} \approx x_1$



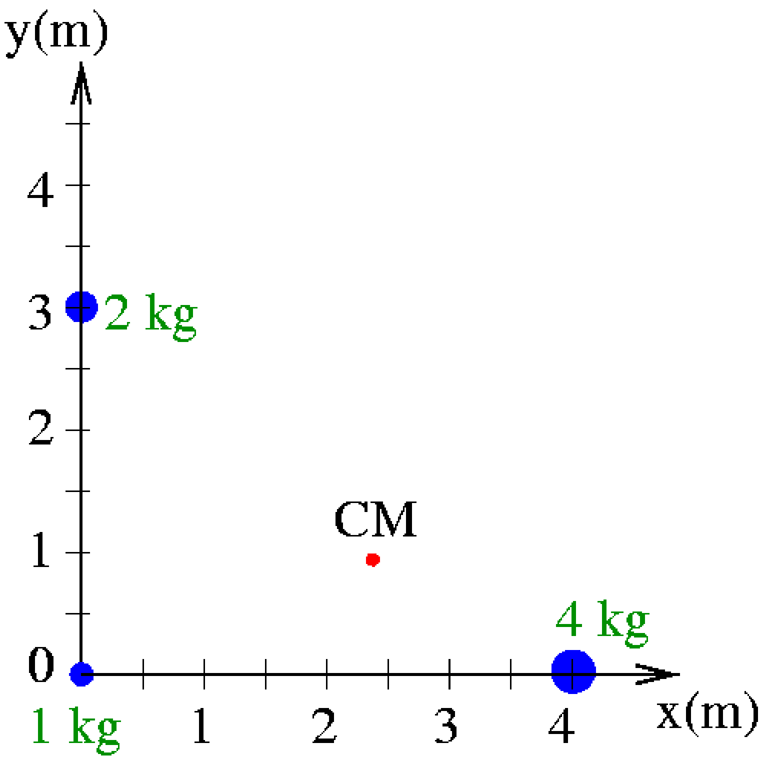
(c) Em geral, o centro de massa é um ponto intermediário entre x_1 e x_2:

$$\boldsymbol{x_1 < x_{CM} < x_2}$$



$$x_{CM} = \frac{m \times 0 + 2m \times L}{3m} = \frac{2}{3}L$$

Exemplo de cálculo de centro de massa de um sistema de partículas



$$m_1 = 1\,\text{kg} \quad x_1 = 0\,\text{m} \quad y_1 = 0\,\text{m}$$

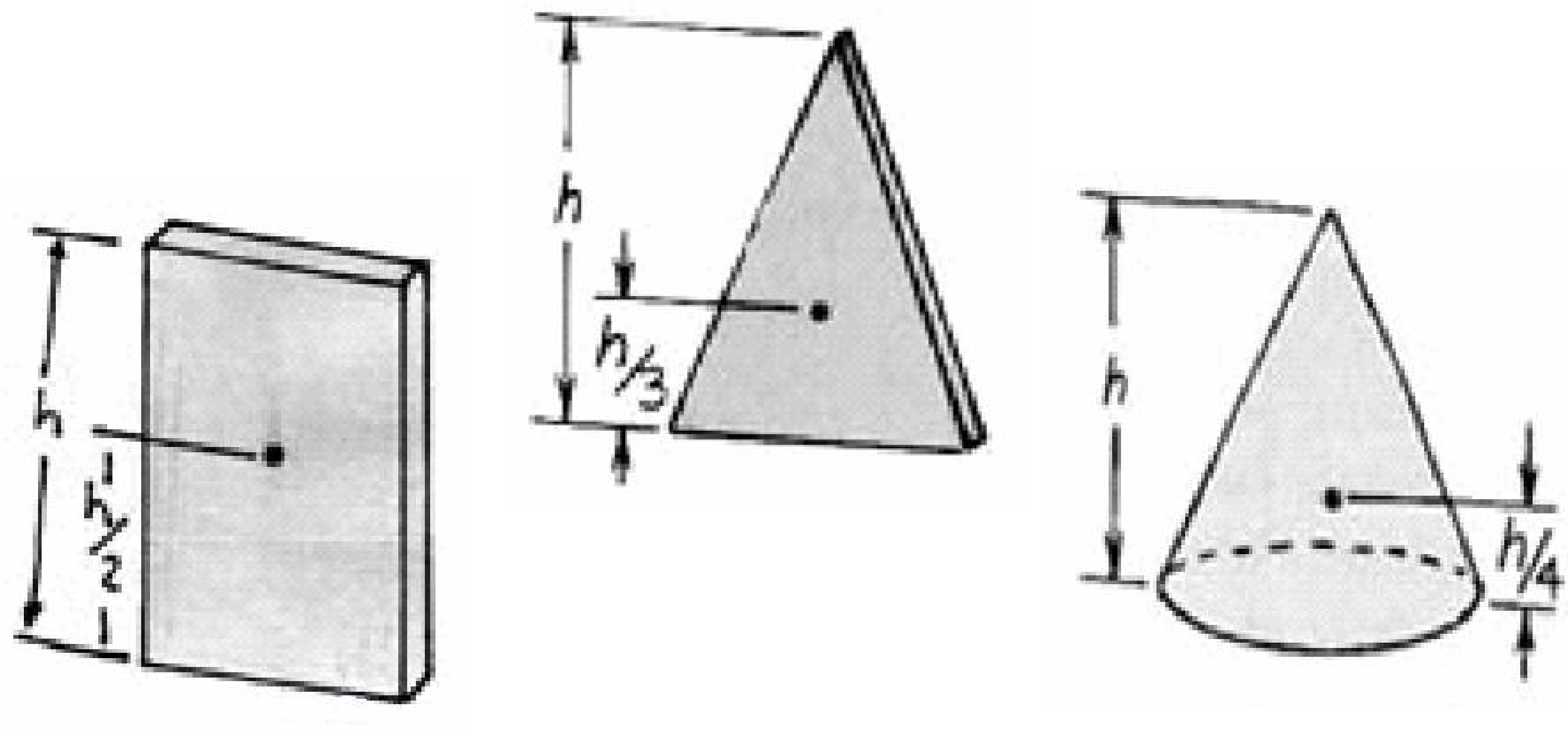
$$m_2 = 2\,\text{kg} \quad x_2 = 0\,\text{m} \quad y_2 = 3\,\text{m}$$

$$m_3 = 4\,\text{kg} \quad x_3 = 4\,\text{m} \quad y_3 = 0\,\text{m}$$

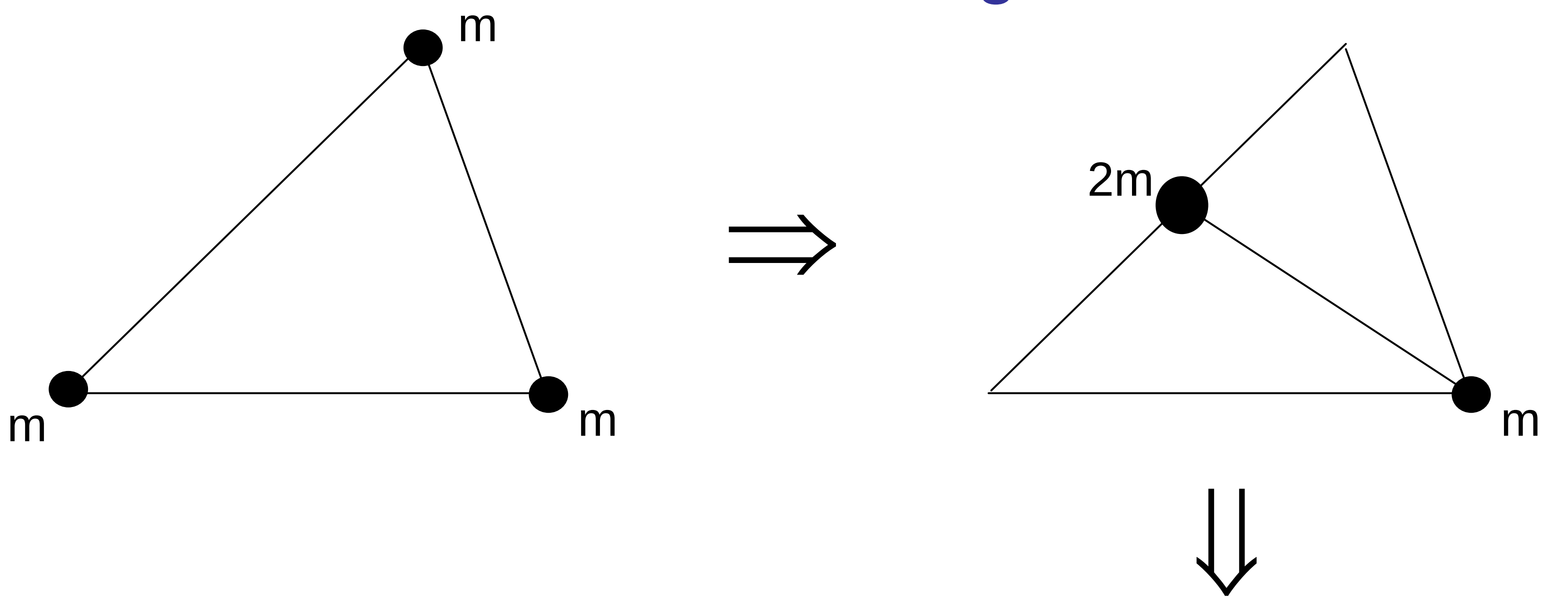
$$x_{CM} = \frac{0\times 1 + 0\times 2 + 4\times 4}{1+2+4}\,\text{m} = 2.3\,\text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{0\times 1 + 3\times 2 + 0\times 4}{1+2+4}\,\text{m} = 0.9\,\text{m}$$

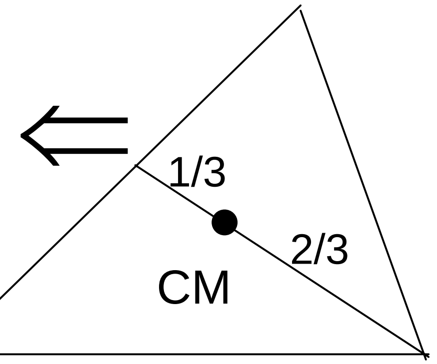
Centro de Massa: É a posição média de toda a massa do corpo ou sistema. Num corpo homogêneo e simétrico o centro de massa está no centro geométrico.

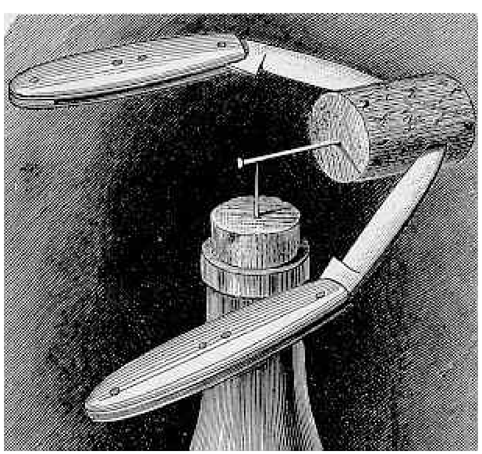


Exemplo: partículas de massas iguais formando um triângulo



Baricentro do triângulo:
Interseção das medianas

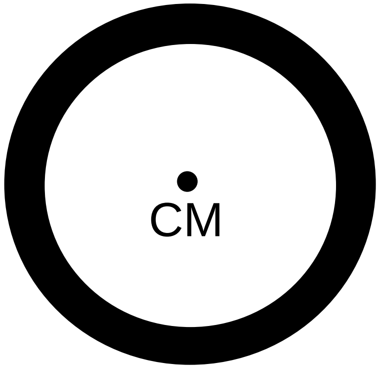




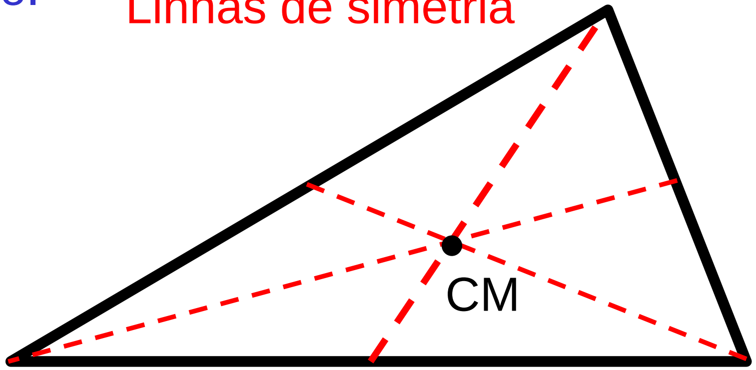
Centro de massa e simetrias:

• Se um corpo possui um ponto, uma linha ou um plano de simetria, o CM situa-se nesse ponto, linha ou plano.

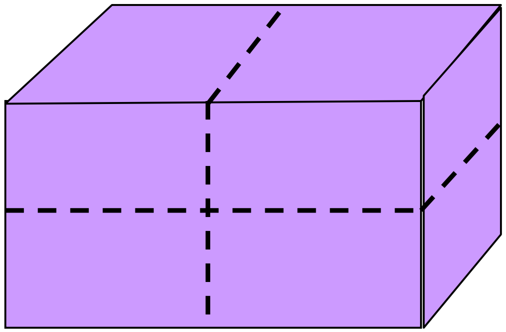
Centro de simetria



Linhas de simetria



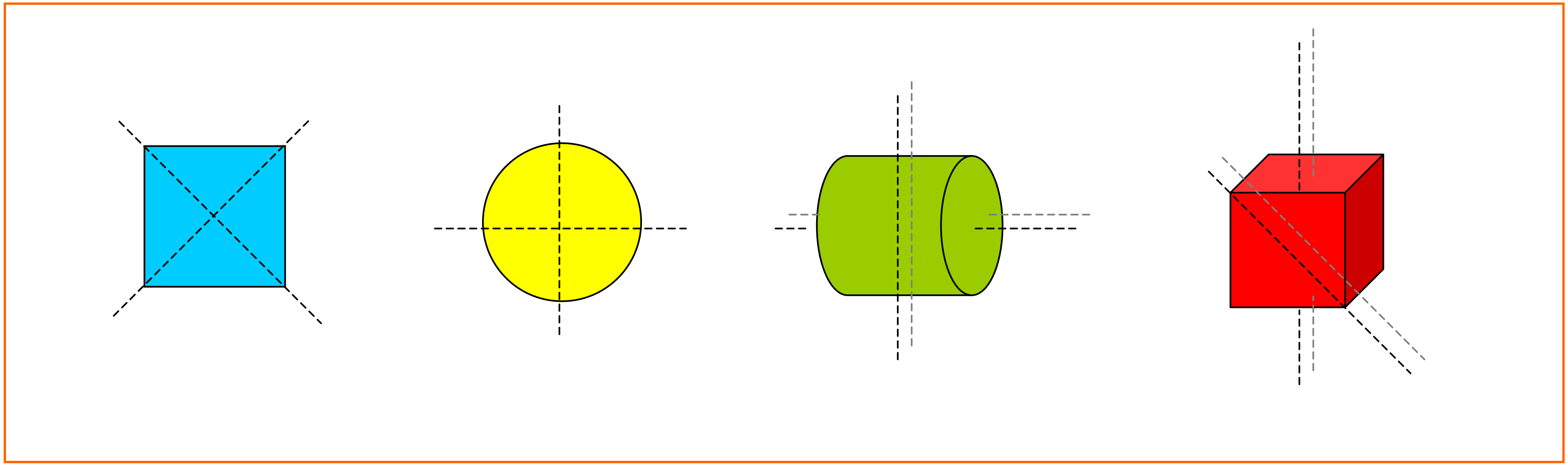
Planos de simetria



➢ Note que para que um ponto, linha ou plano seja de simetria, é preciso que, para cada elemento de massa, exista um outro igual na posição simétrica em relação ao ponto, linha ou plano.

➢ Note que o centro de massa pode cair numa região onde não há massa!

CENTRO DE GRAVIDADE

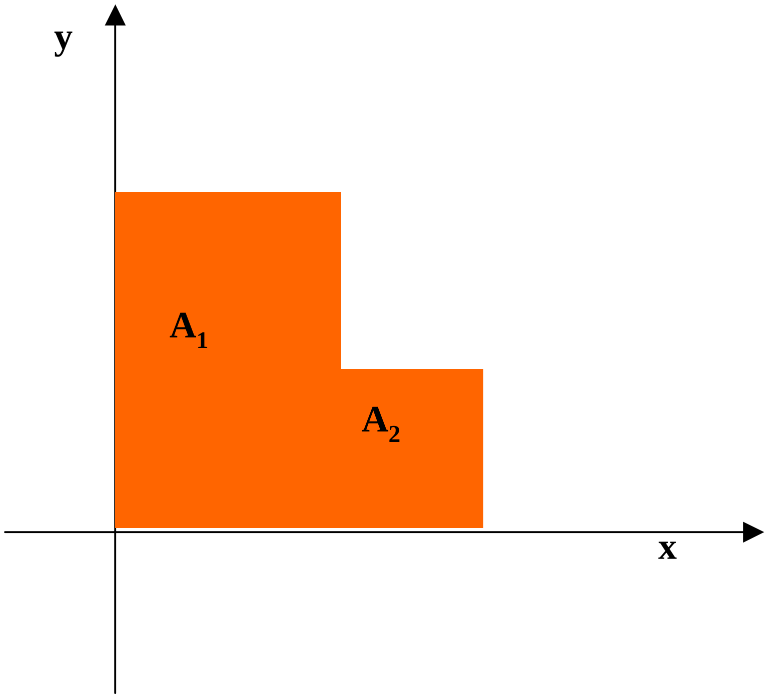


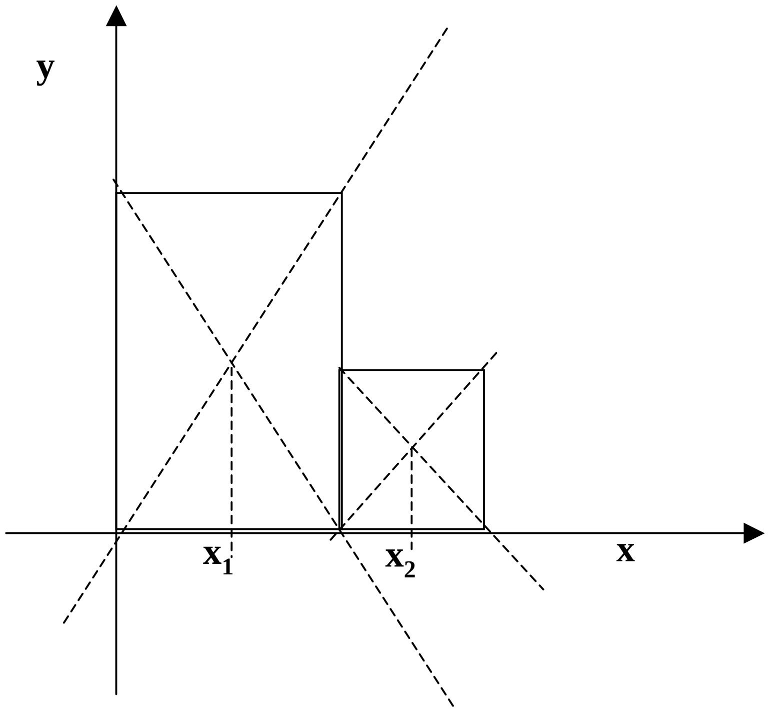
CENTRO DE GRAVIDADE de um corpo é o ponto de aplicação do seu peso. Corpos que admitam eixos de simetria, o centro de gravidade localiza-se na interseção destes eixos.

Num campo gravitacional uniforme o CM coincide com o CG.

Para **placas planas e homogêneas** o centro de gravidade pode ser determinado através da equação:

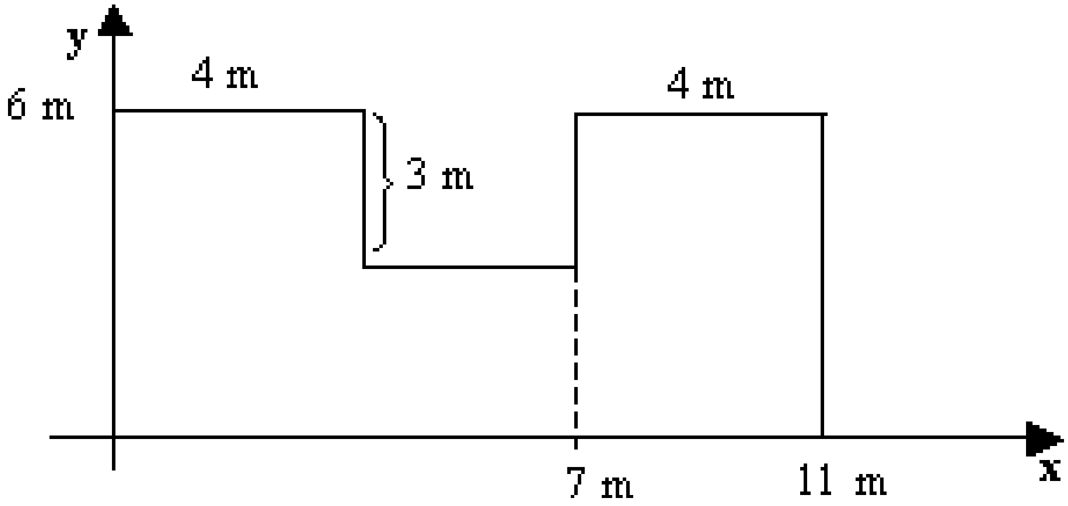
$$X_{cg} = \frac{A_1\ x_1 + A_2\ x_2}{A_1 + A_2} \qquad Y_{cg} = \frac{A_1\ y_1 + A_2\ y_2}{A_1 + A_2}$$





Placas planas e homogêneas:

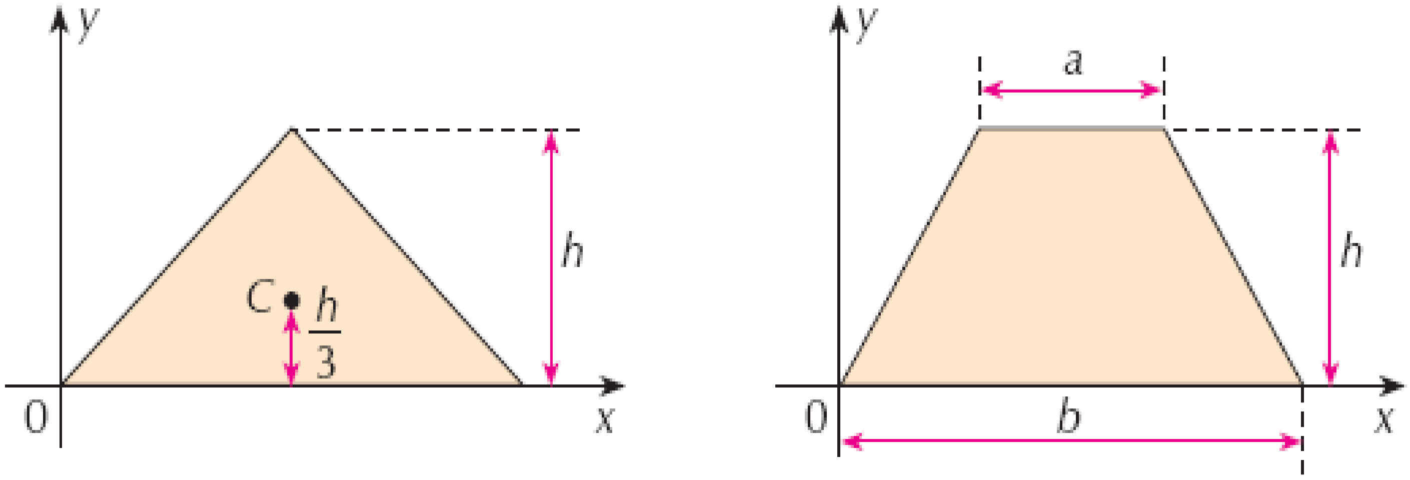
Determine as coordenadas (x_{cg}, y_{cg}) do centro de gravidade da placa plana e homogênea da figura indicada.



Placas planas e homogêneas:

A ordenada “***y***” do centro de massa de uma placa triangular, homogênea e de espessura constante é igual a um terço da altura (figura). Mostre que a ordenada do centro de massa de uma placa trapezoidal, homogênea e de espessura constante, em função da altura ***h*** do trapézio e de suas bases ***a*** e ***b*** pode ser dada por:

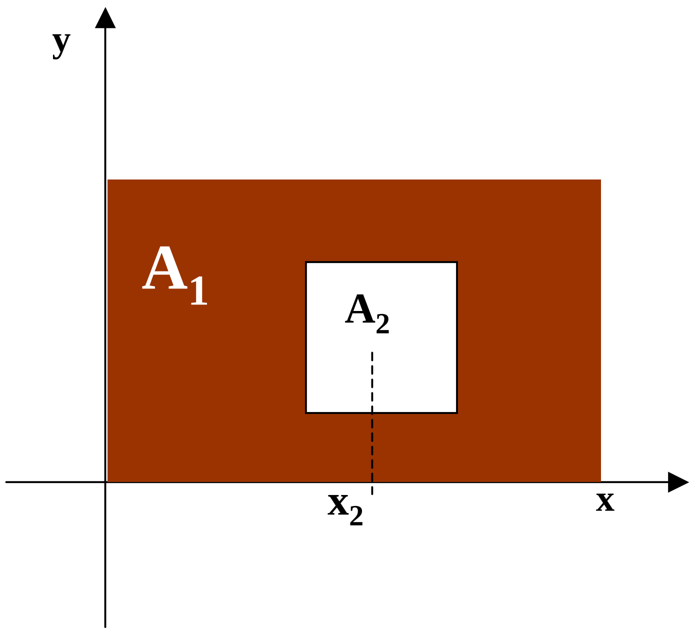
$$y_{cm} = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)}$$

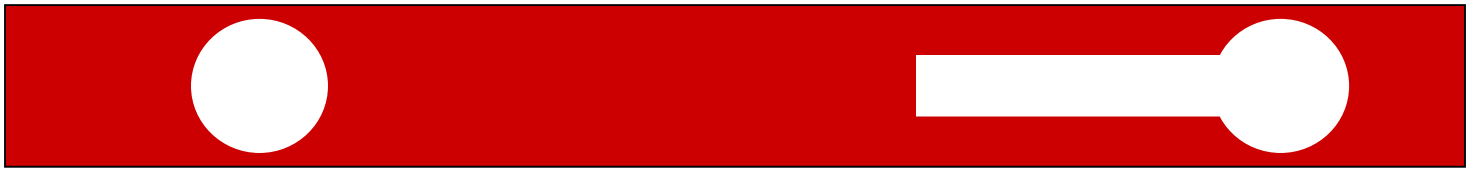


Placa Plana com orifício:

$$x_{cg} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2}$$

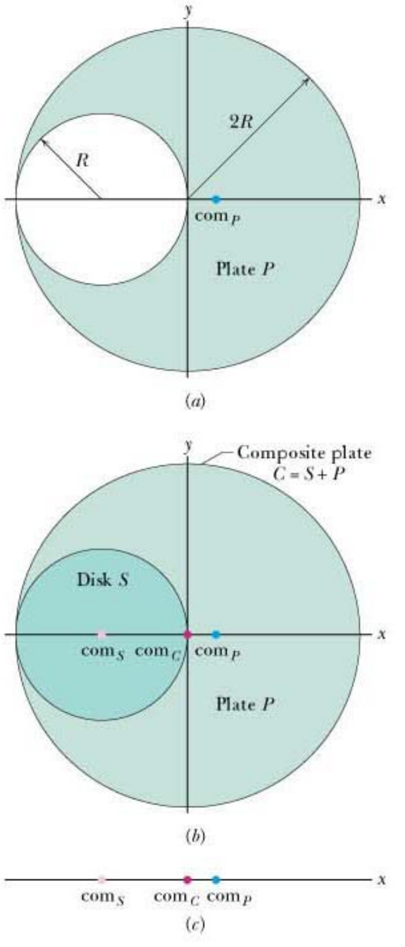
$$y_{cg} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$$





Placa Plana com orifício:

A figura mostra uma placa metálica uniforme ***P*** de raio 2R da qual foi retirado um disco de raio R. pelo processo de estampagem, em uma linha de produção industrial. Localize o centro de massa "CM" usando o sistema de coordenadas *xy* mostrado.



$$x_{cg} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2}$$

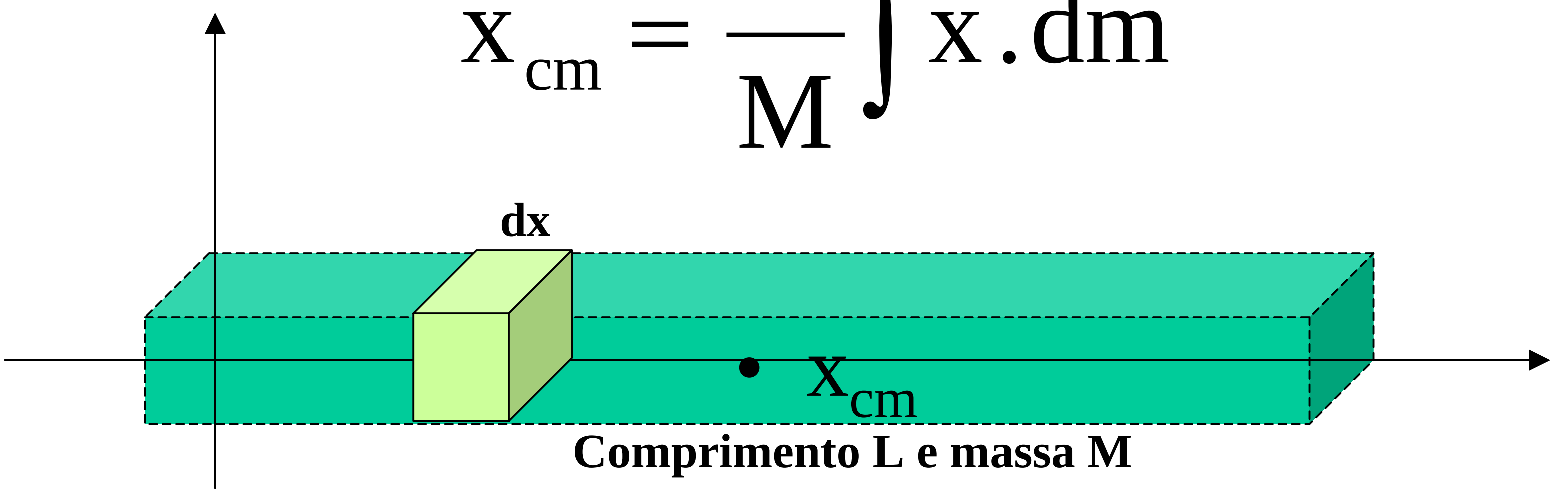
$$y_{cg} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$$

Resp. a) $x_{cm} = R/3$, $y_{cm} = 0$.

Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, . \, dm$$



$\lambda = M/L$

$$r_{cm} = L/2$$

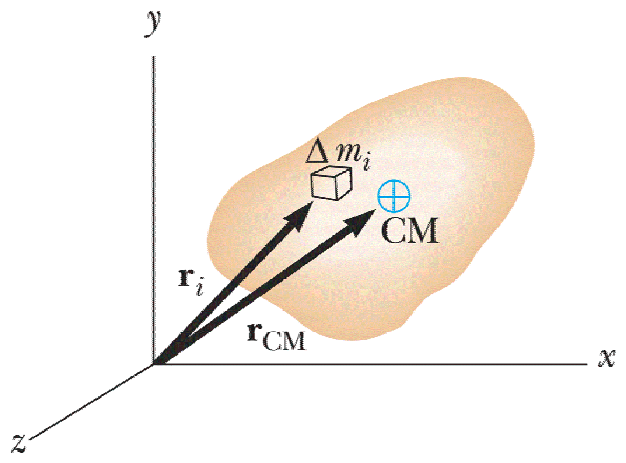
Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Se além disso o corpo tiver densidade uniforme:

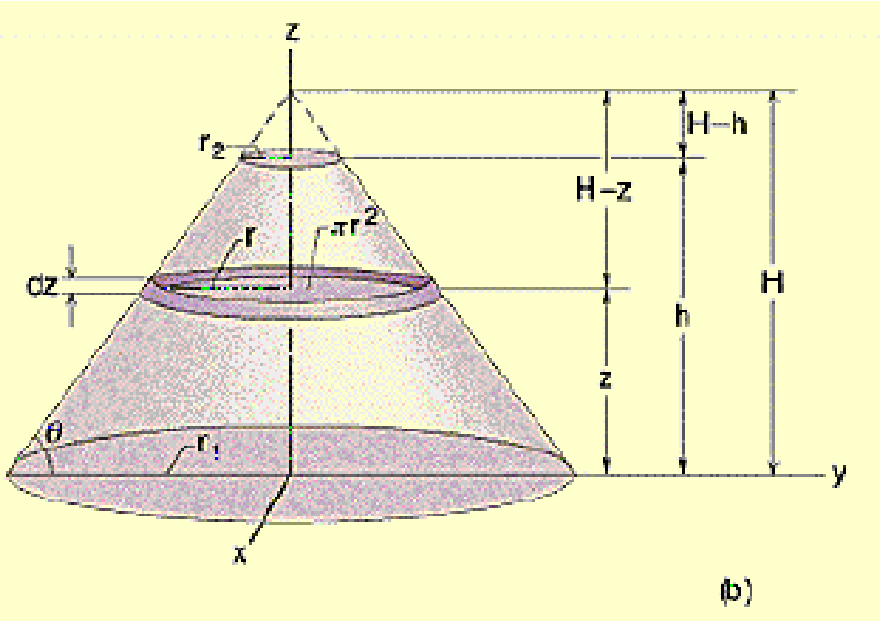
$$dm = \rho dV = \frac{M}{V}dV \Rightarrow \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int x\,dV \\ y_{CM} = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int y\,dV \\ z_{CM} = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int z\,dV \end{cases}$$



Integrais triplas!
Não precisaremos por enquanto.

Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Silbury Hill – Inglaterra
(4600 anos atrás)



$$z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

$$dV = \pi r^2\, dz,$$

$$\tan\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}.$$

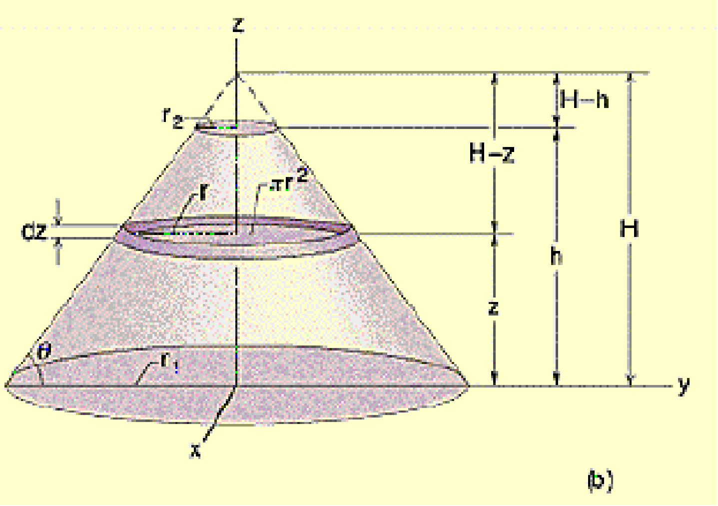
Exemplo: Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Silbury Hill – Inglaterra
(4600 anos atrás)

$$dV = \pi r^2\, dz.$$

$$\tan\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H - z}{r},$$

$$r = (H - z)\frac{r_1}{H}.$$



$$z_{cm} = \frac{1}{V}\int z\, dV = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H - z)^2\, dz$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\, dz$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right].$$

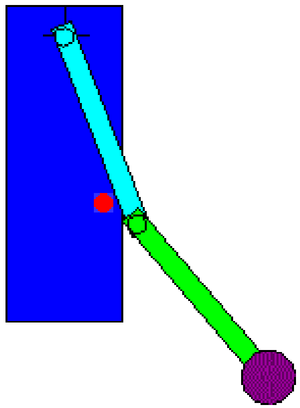
Substituting known values, we find

$$z_{cm} = \frac{\pi(88\text{ m})^2(40\text{ m})^4}{(4.09\times10^5\text{ m}^3)(50.8\text{ m})^2} \times \left[\frac{1}{4} - \frac{2(50.8\text{ m})}{3(40\text{ m})} + \frac{(50.8\text{ m})^2}{2(40\text{ m})^2}\right] \quad \text{(Answer)}$$

$$= 12.37\text{ m} \approx 12\text{ m}.$$

Movimento do Centro de Massa

- **2ª Lei de Newton para um sistema de partículas.**
- **Velocidade do centro de massa,**
- **Aceleração do centro de massa.**
- **Centro de massa e velocidade constante.**



Referência:

- **<u>Halliday</u>**, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1. Cap. 09 da 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- **<u>Tipler</u>**, Paul. Física, Vol 1 cap. 08. 4ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

Considere um sistema de partículas cujas massas são m_1, m_2, ., m_n, e sejam v_1, v_2, ..., v_n, respectivamente,suas velocidades num certo instante. Neste instante, o centro de massa possui velocidade v_{CM} dada por uma **média ponderada** das velocidades das partículas do sistema:

$$\mathbf{v_{CM}} = \frac{\mathbf{m_1 v_1 + m_2 v_2}}{\mathbf{m_1 + m_2}}$$

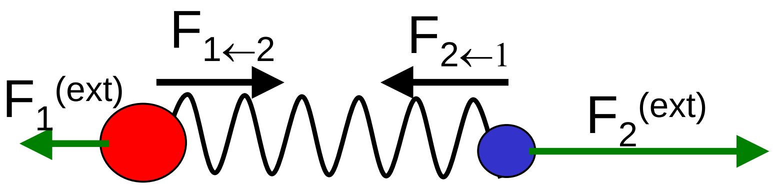
quantidade de movimento total do sistema

$$(m_1 + m_2)v_{CM} = quantidade\ de\ movimento$$

A quantidade de movimento de um sistema de partículas é igual à quantidade de movimento do centro de massa, considerando que toda a massa do sistema está concentrada nele.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

- Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 em uma dimensão:



$$m_1 a \Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{R1}$$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{1\leftarrow 2} + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{2\leftarrow 1} + F_2^{(ext)} \end{cases}$$

Note como distinguimos forças internas ($F_{1\leftarrow 2}$ e $F_{2\leftarrow 1}$) de forças externas ($F_1^{(ext)}$ e $F_2^{(ext)}$).

Somando-se as equações termo a termo:

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{1\leftarrow 2} + F_{2\leftarrow 1} + F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}$$

Da 3ª lei de Newton, $F_{1\leftarrow 2} = - F_{2\leftarrow 1}$

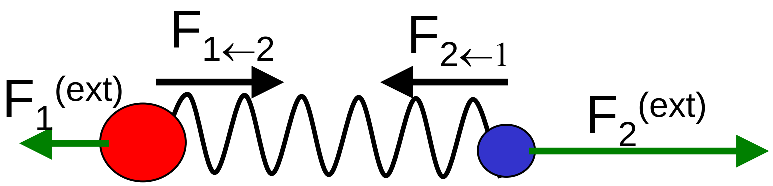
$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} = F^{(ext)}$$

$F^{(ext)}$ é a força externa resultante.

As forças internas se cancelam.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

- Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 em uma dimensão:



$$m_1 a \Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{R1}$$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{1\leftarrow 2} + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{2\leftarrow 1} + F_2^{(ext)} \end{cases}$$

Note como distinguimos forças internas ($F_{1\leftarrow 2}$ e $F_{2\leftarrow 1}$) de forças externas ($F_1^{(ext)}$ e $F_2^{(ext)}$).

Somando-se as equações termo a termo:

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{1\leftarrow 2} + F_{2\leftarrow 1} + F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}$$

Da 3ª lei de Newton, $F_{1\leftarrow 2} = - F_{2\leftarrow 1}$

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} = F^{(ext)}$$

$F^{(ext)}$ é a força externa resultante.

As forças internas se cancelam.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

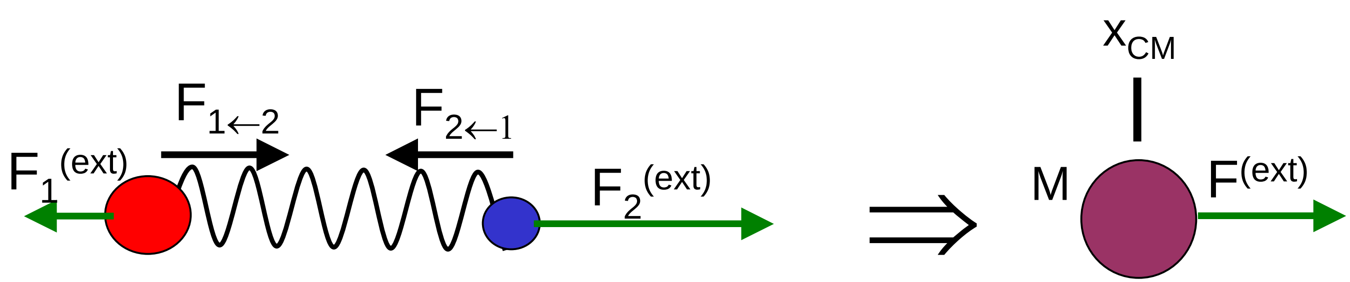
$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=F^{(ext)}\Rightarrow\frac{d^2\left(m_1x_1+m_2x_2\right)}{dt^2}=F^{(ext)}$$

Usando a Definição: $\boxed{x_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}}$ tal que $F^{(ext)}=(m_1+m_2)\frac{d^2x_{CM}}{dt^2}=M\frac{d^2x_{CM}}{dt^2}$

$$(m_1+m_2)x_{CM}=m_1x_1+m_2x_2$$

onde $M=m_1+m_2$ é a massa total do sistema.

O sistema age como se toda massa estivesse concentrada no ponto x_{CM} (centro de massa)



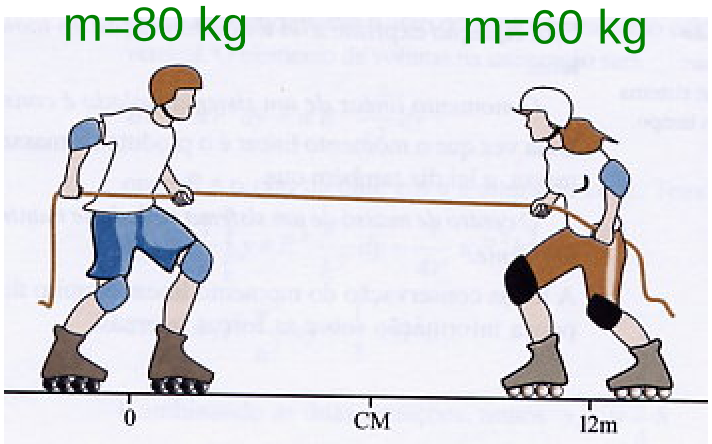
$$\boxed{F^{(ext)}=M\frac{d^2x_{CM}}{dt^2}}$$

Em particular, se **$F^{(ext)}$=0**, a velocidade do CM é constante

$$\frac{dx_{CM}}{dt}=v_{CM}=cte.$$

2ª Lei de Newton para um sistema de 2 partículas

Exemplo em que o centro de massa tem velocidade constante



Dois patinadores no gelo (sem atrito com o chão) encontram-se inicialmente a uma distância de 12 m. Eles puxam as extremidades de uma corda até se encontrarem. Em que ponto eles se encontram? O resultado depende das forças exercidas por eles?

➢ Só há forças internas ao sistema $\Rightarrow$ O centro de massa tem velocidade constante.

$$x_{CM} = \frac{0 \times 80 + 12 \times 60}{80 + 60}\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{m} \Rightarrow$$

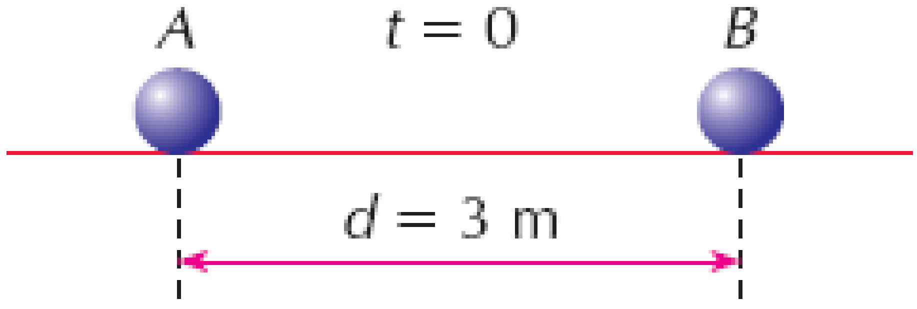
Os patinadores se encontrarão a 5,1 m da posição inicial do patinador da esquerda, **não importam as forças exercidas por eles.**

Movimento do centro de massa.

Duas partículas, A e B, de massas $m_A = 0{,}1$ kg e $m_B = 0{,}4$ kg, são abandonadas no instante $t = 0$, na posição indicada na figura.

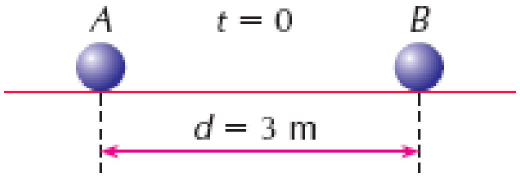
a) Localize a posição do centro de massa das partículas no instante $t = 0$.

b) Sabendo-se que as partículas se atraem, pois foram eletrizadas com cargas elétricas de sinais opostos, a que distância da posição inicial da partícula A ocorrerá a colisão? Considere o sistema isolado de forças externas.



Movimento do centro de massa.

Duas partículas, A e B, de massas $m_A = 0{,}1$ kg e $m_B = 0{,}4$ kg, são abandonadas no instante $t = 0$, na posição indicada na figura.



a) Localize a posição do centro de massa das partículas no instante $t = 0$.

b) Sabendo-se que as partículas se atraem, pois foram eletrizadas com cargas elétricas de sinais opostos, a que distância da posição inicial da partícula A ocorrerá a colisão? Considere o sistema isolado de forças externas.

Solução:

a) Sendo $x_A = 0$ e $x_B = 3$ m, temos para o centro de massa C:

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \Rightarrow x_C = \frac{0{,}1 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 3}{0{,}1 + 0{,}4} \Rightarrow \boxed{x_C = 2{,}4 \text{ m}}$$

b) O sistema de partículas está isolado de forças externas. Como o centro de massa estava inicialmente em repouso, pois as partículas foram abandonadas, ele permanece em repouso. Logo, a colisão ocorre exatamente na posição do centro de massa, isto é, a 2,4 m da posição inicial da partícula A:

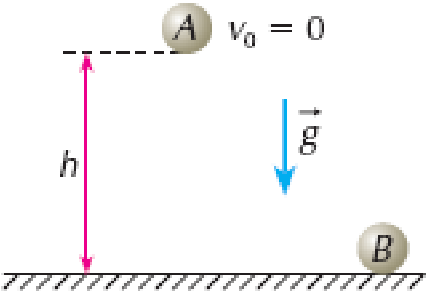
Movimento do centro de massa.

As esferas A e B possuem massas m e $3m$, respectivamente. A esfera A é abandonada de uma altura $h = 0{,}45$ m do solo e B está em repouso.

Seja $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ a aceleração da gravidade. Determine:

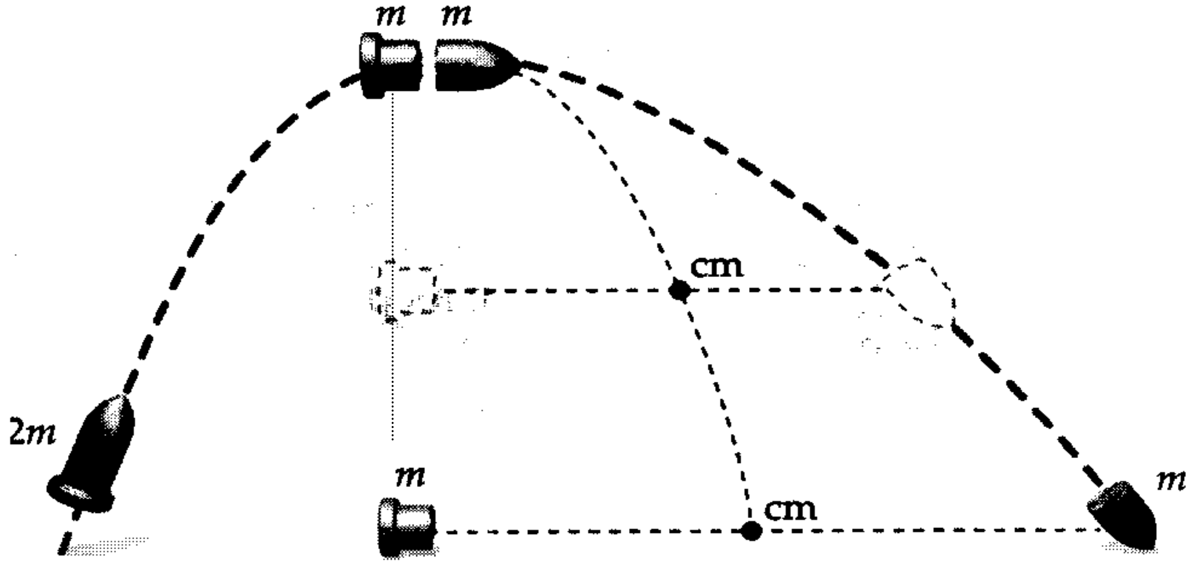
a) o módulo da aceleração do centro de massa do sistema constituído pelas esferas A e B, enquanto A estiver em queda livre.

b) o módulo da velocidade do centro de massa do sistema, no instante em que a esfera A atinge o solo.



Movimento do centro de massa.

Um projétil é disparado sobre um campo horizontal, com uma velocidade inicial de 24,5 m/s sob um ângulo de 36,9º. No ponto mais elevado da trajetória o projétil explode e se divide em dois fragmentos de massas iguais. Um deles cai na vertical até o solo. Em que ponto outro fragmento atinge o solo?



Resp. R = 58,8 m e x = 1,5R = 88,2 m.

Generalização para 3 dimensões:

$$\left.\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\
y_{CM} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\
z_{CM} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i
\end{aligned}\right\} \boxed{\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$$

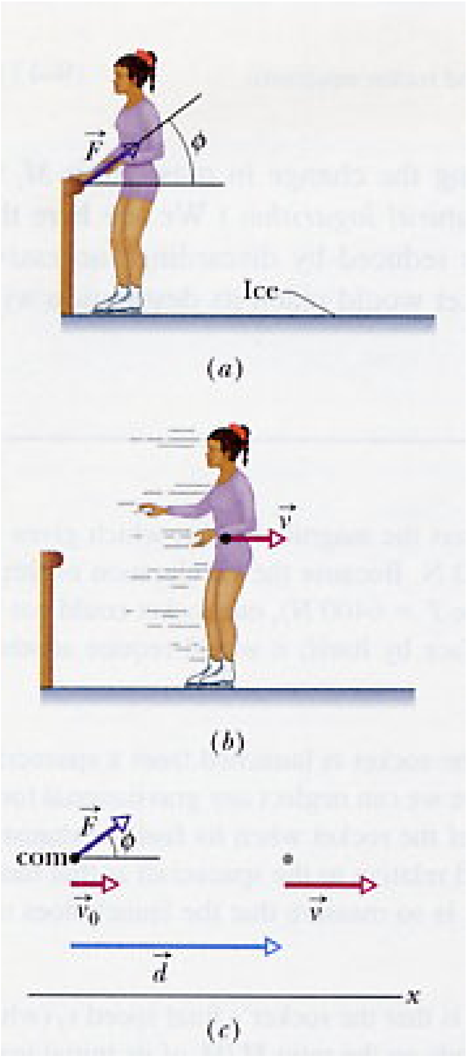
$$\vec{F}^{(ext)} = m_1 \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_2}{dt^2} + \cdots + m_N \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_N}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_{CM}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{F}^{(ext)} = M\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_{CM}}{dt^2}}$$

O sistema responde à resultante das forças externas como se a massa total M estivesse toda concentrada no centro de massa.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas

Forças externas e mudanças de energia interna:



Considere a situação ao lado, em que uma patinadora empurra um corrimão (força **F**) e adquire velocidade e energia cinética no processo. Nessa situação:

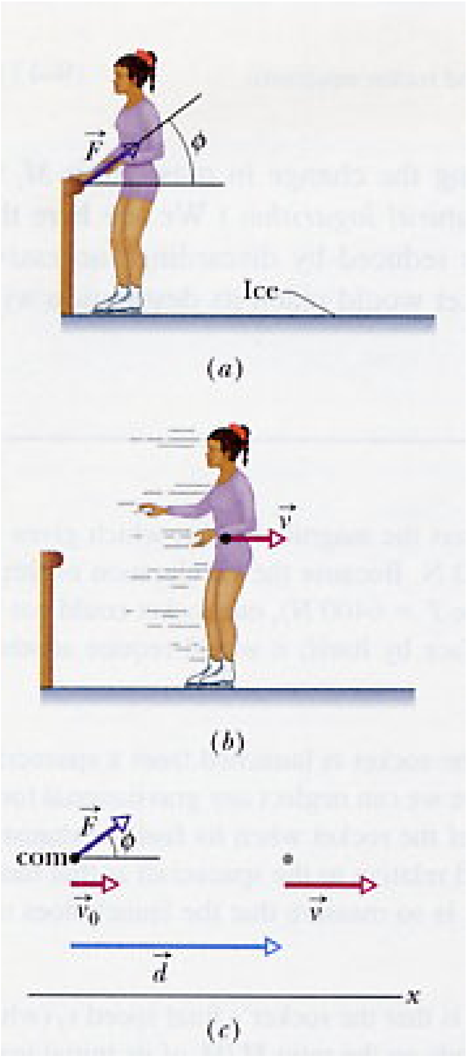
a) Energia (muscular) é gasta pela patinadora, que se transforma em energia cinética. Há apenas transferência de energia entre partes do sistema, não entre o sistema e o ambiente externo.

b) A situação envolve um sistema de partículas e não uma partícula apenas: as diferentes partes da patinadora movem-se diferentemente.

Para analisar essa situação, utilizamos a 2a lei de Newton para um sistema de partículas, em que este é substituído por toda sua massa concentrada no Centro de Massa

$$\vec{F}^{(ext)} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

Forças externas e mudanças de energia interna:



O trabalho realizado pela força no centro de massa ao deslocá-lo de uma distância d se traduz numa mudança da energia cinética da patinadora:

$$Fd\cos\phi = \Delta K$$

Se parte do trabalho é utilizada para aumento de energia potencial (p. ex., a patinadora sobe uma rampa), o resulta se generaliza:

$$Fd\cos\phi = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{mec}$$

Essa energia foi perdida pela patinadora, que despendeu energia interna na mesma proporção:

$$Fd\cos\phi = \Delta E_{mec} = -\Delta E_{\text{int}}$$