UFES CEUNES

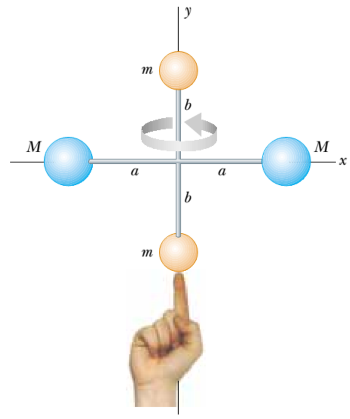
Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Paulo Moscon

Nome:

Matrícula:

3^a Prova - Fundamentos de Mecânica Clássica
2014/02

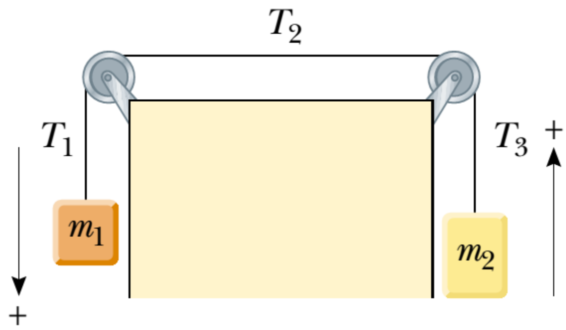
Questão 1) [2,5] Quatro esferas são posicionadas nas extremidades de duas varetas de massas desprezíveis, no plano xy (veja Figura ao lado). Calcule o momento de inércia do sistema para uma rotação em torno do eixo y.



OBS: O momento de inécia de uma esfera, relativamente a um eixo que passa pelo seu centro de massa é

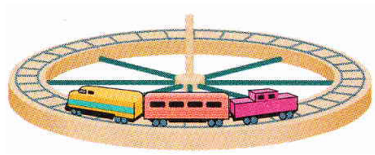
$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$$

Questão 2) [2,5] Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados por uma corda fina através de duas polias idênticas sem atrito, cada qual com momento de inércia I e raio R, como mostrado na Figura ao lado. Calcule: **(a)** A aceleração dos blocos; **(b)** As trações T_1, T_2 e T_3 na corda; **(c)** A velocidade angular nas polias.



Questão 3) [2,5] Um homen está em pé no centro de uma plataforma que gira (sem atrito) com uma velocidade angular de 1,2rev/s; seus braços estão abertos e ele segura um tijolo em cada mão. O momento de inércia do sistema composto por homen, tijolos e plataforma em torno do eixo vertical central da plataforma é 6,0kg.m^2. Se ao mover os tijolos para perto de seu peito o homen reduz o momento de inércia do sistema para 2,0kg.m^2, quais são: **(a)** A velocidade angular resultante da plataforma e **(b)** a razão entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética original? **(c)** Que fonte fornece a energia adicional?

Questão 4) [2,5] Uma pista é montada sobre uma grande roda que pode girar livremente com atrito desprezível em torno de um eixo vertical (Fig. ao lado). Um trenzinho de brinquedo de massa m é colocado sobre a pista e, com o sistema inicialmente em repouso, a alimentação elétrica do trenzinho é ligada. O trenzinho adquire uma velocidade de 0,15m/s em relação à pista. Qual a velocidade angular da roda se sua massa for $1{,}1m$ e seu raio for 0,43m? (Trade a roda como um aro e despreze as massas dos raios e do cubo da roda.)



Questão 1

Esta questão está nas listas de exercícios resolvidos

O momento de inércia total é a soma de todas as contribuições.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2I_m + 2I_M$$

As massas m contribuem da mesma forma, assim como as massas M.
Note que as esferas de masa m giram em torno do eixo que passa pelos seus centros. Assim, para as massas m devemos consideras apenas os momentos de inércia relativo ao seus centros de massa $I_m = \frac{2}{5}mr^2$, onde r é o raio das massas m.

As massas M giram em torno de um eixo que não passa pelo seu centro de massa. Assim, para as massas M devemos levar em conta o teorema dos eixos paralelos.

$$I_M = \frac{2}{5}MR^2 + M(a+R)^2$$

O fator $(a + R)$ corresponde à distância do centro das esferas M ao eixo y.
Portanto o momento de inércia total é:

$$I = 2.\frac{2}{5}mr^2 + 2.\big(\frac{2}{5}MR^2 + M(a+R)^2\big)$$

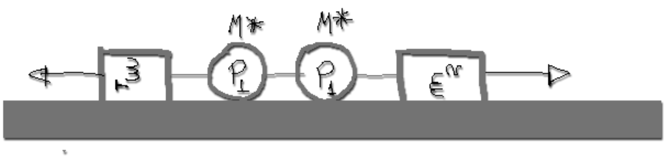
Questão 2

Vou assumir uma configuração equivalente como ilustrado na Figura abaixo. Nesta configuração, considero que o movimento é unidimensional com dimensão definida pela corda.

Vou assumir também que o sentido positivo é da esquerda para a direita, nesta configuração equivalente. De posse dos resultados os novos sentidos serão reavaliados de acordo com o caso original.

Adicionalmente, vou considerar que as polias oferecem uma resistência ao movimento com massa inercial M^*. Esta massa inercial equivalente da molia (M^*) não é a massa da polia, mas sim o efeito de resistência como se fosse um objeto qualquer. Vimos em aula que esta massa é dada por

$$M^* = \frac{I}{R^2}$$



Portanto,

$$
\begin{aligned}
m_2 g - m_1 g &= \big(m_1 + 2M^* + m_2\big)a \\
a &= \frac{\big(m_2 - m_1\big)g}{\big(m_1 + 2I/R^2 + m_2\big)}
\end{aligned}
$$

Note que $a > 0$ se $m_2 > m_1$; este fato representa o aumento na velocidade no sentido positivo do eixo x.

Introduzindo $I = M_P R^2/2$, temos que

$$
a = \frac{\big(m_2 - m_1\big)g}{\big(m_1 + M_P + m_2\big)} \qquad \text{onde } M_P = \text{massa da polia}
$$

Para a tração T_1, basta aplicarmos a soma das forças sobre o bloco m_1.

$$
\begin{aligned}
T_1 - m_1 g &= m_1 a \\
T_1 &= m_1(g + a) \\
T_1 &= m_1\Big(1 + \frac{\big(m_2 - m_1\big)}{\big(m_1 + M_P + m_2\big)}\Big)g
\end{aligned}
$$

Para T_2 o procedimento é análogo. Contudo, devemos considerar a massa equivalente da polia $M^* =$

I/R 2.

$$
\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= M^* a \\
T_2 &= T_1 + \frac{I}{R^2}a \\
T_2 &= T_1 + \frac{M_P R^2/2}{R^2}a \\
T_2 = m_1\Big(1 + \frac{\big(m_2 - m_1\big)}{\big(m_1 + M_P + m_2\big)}\Big)g &+ \frac{M_P\big(m_2 - m_1\big)g}{2\big(m_1 + M_P + m_2\big)}
\end{aligned}
$$

OBS: Bastaria parar na segunda equação e dizer que T_1 e a foram calculados acima.

Questão 3

A questão 3 foi resolvida em sala de aulas. Quem faltou no dia, buscar com os colegas.

Questão 4

Por conservação de $\vec{L}$.

$\Rightarrow \vec{L} = I\vec{w}$

$\vec{L}_0 = \vec{L}_f$

mas

$\vec{L}_0 = \vec{0}$

$\vec{L} = \vec{0}$

$\Rightarrow I_r\vec{w}_r + I_h\vec{w}_h = 0$ (final)

obs: $r \rightarrow$ roda

$h \rightarrow$ trem

$$\vec{w}_r = -\frac{I_h}{I_r}\vec{w}_h$$

foi dada a velocidade relativa v_{rel}

$\rightarrow$ Vetorialmente $\Rightarrow \vec{w}_h = \vec{w}_r + \vec{w}_{rel}$

onde $|\vec{w}_{rel}| = \frac{v_{rel}}{R}$

Se considerarmos o eixo y como sendo o de rotação

$\Rightarrow \vec{w}_{rel} = \frac{v_{rel}}{R}\hat{j}$ e $\vec{w}_r = w_r\hat{j}$

$\hookrightarrow$ desconhecido ainda.

$$\Rightarrow \vec{w}_r = -\frac{I_h}{I_r}\left(\vec{w}_r + \vec{w}_{rel}\right)$$

$$\vec{w}_r\left(1 + \frac{I_h}{I_r}\right) = -\frac{I_h}{I_r}\vec{w}_{rel}$$

$$\vec{w}_r\left(I_r + I_h\right) = -I_h\vec{w}_{rel}$$

$$\vec{w}_r = -\frac{I_h}{\left(I_r + I_h\right)}\frac{v_{rel}}{R}\hat{j}$$

$I_h = m_h \cdot R^2$; $I_r = m_r R^2$

$$\vec{w}_r = -\frac{m_h}{\left(m_r + m_h\right)} \cdot \frac{v_{rel}}{R}\hat{j}$$

$$\vec{w}_r = -\frac{1}{2{,}1} \cdot \frac{0{,}15}{0{,}43}\hat{j}$$

$\vec{w}_r = -0{,}17 \text{ rad/s}\,\hat{j} \quad \rightarrow f = \frac{|\vec{w}_r|}{2\pi} = \frac{0{,}17}{2\pi}$ rev/s

— II —