Lista de Exercícios – 3
UFPB – Dep. de Física - Prof. Edmundo M. Monte

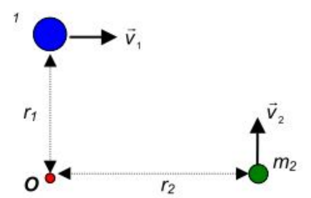
Exercícios Resolvidos –

OBS: Esses exercícios são na maioria do livro texto e foram resolvidos por vários professores do DF e de outras universidades.

Questão – 1

Dois objetos estão se movendo como mostra a figura a seguir. Qual é o seu momento angular em torno do ponto ***O*** ?

$m_1 = 6{,}5kg$	$m_2 = 3{,}1kg$
$v_1 = 2{,}2m/s$	$v_2 = 3{,}6m/s$
$r_1 = 1{,}5$m	$r_2 = 2{,}8m$



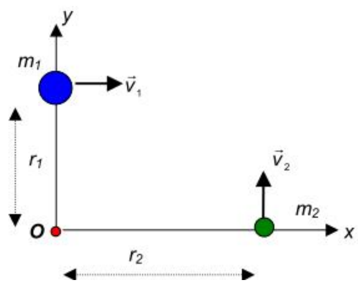
$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = \hat{i} m_1 v_1 \\ \vec{r}_1 = \hat{j}\, r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = \hat{j}\, m_2 v_2 \\ \vec{r}_2 = \hat{i}\, r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \left(\hat{j}\times\hat{i}\right) m_1\, r_1\, v_1 = -\hat{k}\, m_1\, r_1\, v_1 \\ \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \left(\hat{i}\times\hat{j}\right) m_2\, r_2\, v_2 = +\hat{k}\, m_2\, r_2\, v_2 \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L} = \hat{k}\ \left(m_2 v_2 r_2 - m_1 v_1 r_1\right)$$

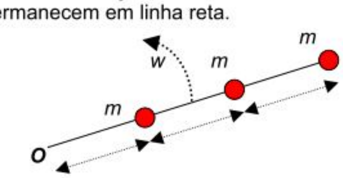
$$\vec{L} = \hat{k}\ 9{,}798\, kg.m^2 / s$$



Questão 2:

Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento L , como mostra a figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em ***O*** com velocidade angular w , de tal forma que as partículas permanecem em linha reta.

Quais são, em termos de m , L e w e relativamente ao ponto ***O***



a) O momento de Inércia do conjunto?

$$I = m\,L^2 + m\,(2L)^2 + m\,(3L)^2 = 14\ m\,L^2$$

b) O momento angular da partícula do meio?

Se definirmos o *eixo z* como sendo perpendicular à folha de papel e saindo dela, o momento angular das três partículas estarão no sentido positivo do *eixo z* .

$$L_2 = I_2\, w = 4\ m\,L^2\, w$$

c) O momento angular total das três partículas?

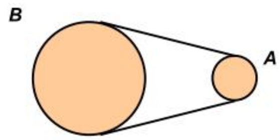
$$L = I\, w = 14\ m\,L^2\, w$$

Questão 3:

As rodas A e B da figura a seguir estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior que o raio da correia A .

a) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem o mesmo momento angular?

$r_B = 3\,r_A$



Como as duas rodas estão conectadas, as velocidades das suas bordas serão iguais, ou seja:

$v_A = v_B$

ou seja:

$$w_A r_A = w_B r_B \quad \Rightarrow \quad \frac{w_A}{w_B} = \frac{r_B}{r_A} = 3 \quad \therefore \quad w_A = 3 w_B$$

$$L_A = I_A\, w_A$$

$$L_B = I_B\, w_B$$

Como $L_A = L_B$

$$I_A w_A = I_B w_B \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{w_B}{w_A} \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{3}$$

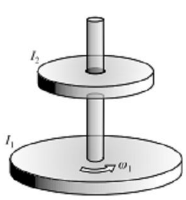
b) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

Como $K_A = K_B$

$$\frac{1}{2} I_A w_A^2 = \frac{1}{2} I_B w_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{w_B}{w_A}\right)^2 \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{9}$$

Questão 4:

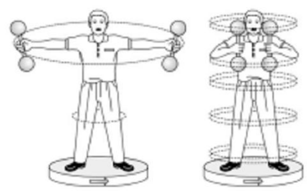
Um disco cujo momento de inércia vale I_1 = 1,27 kg.m^2 gira com velocidade angular de w_1 = 824 rev/min em torno de um eixo vertical de momento de inércia desprezível. Um segundo disco, de momento de inércia I_2 = 4,85 kg.m^2, inicialmente em repouso $w_2 = 0$, é acoplado bruscamente ao mesmo eixo. Qual será a velocidade angular w da combinação dos dois discos girando juntos com a mesma velocidade angular?



Solução: Como não existem torques externos sobre o sistema, o momento angular é conservado e obtemos que $L_i = I_1\omega_1 + 0 = L_f = \omega(I_1 + I_2)$. Portanto, a velocidade angular dos discos se movendo juntos vale $\omega = 17{,}9 rad / s$.

Questão 5:

Um homem está em pé sobre uma plataforma giratória, conforme a figura abaixo. Inicialmente, ele está com os seus braços abertos e gira com uma velocidade angular de $0{,}25 rev/s$. Depois ele aproxima os braços do corpo e a velocidade angular passa a ser de $0{,}80 rev/s$. Encontre a razão entre os momentos de inércia do homem nas condições inicial e final.



Solução: Pela conservação do momento angular, obtemos que

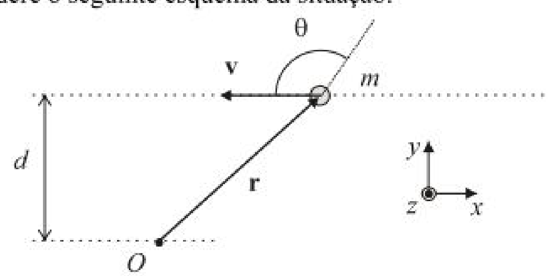
$$L_i = L_f \rightarrow \omega_i I_i = \omega_f I_f \rightarrow \frac{I_i}{I_f} = 3{,}2 .$$

Questão - 6:

Mostre que o momento angular, em relação a um ponto qualquer, de uma partícula que se move com velocidade uniforme, permanece constante durante o movimento.

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação:



O módulo do momento angular do sistema em relação a um ponto genérico O vale:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Na coordenada z:

$$l = rmv \operatorname{sen} \theta$$

O esquema mostra que:

$$r \operatorname{sen} \theta = d$$

Logo:

$$\boxed{l = mvd}$$

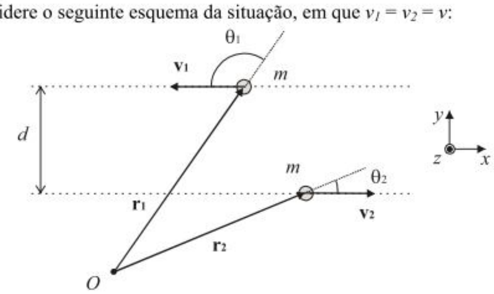
Como m, v e d são constantes, l também é constante.

Questão – 7:

Duas partículas de massa m e velocidade v deslocam-se, em sentido contrário, ao longo de duas retas paralelas separadas por uma distância d. Ache a expressão para o momento angular do sistema em relação a qualquer ponto.

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação, em que $v_1 = v_2 = v$:



O módulo do momento angular do sistema em relação a um ponto genérico O vale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$$

Na coordenada z:

$$L = r_1 mv \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 mv \operatorname{sen}\theta_2$$

$$L = mv\left(r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2\right)$$

$$\boxed{L = mvd}$$

Questão- 8:

Ache o momento angular da Terra em sua rotação em torno do próprio eixo, utilizando os dados dos apêndices. Suponha que a Terra seja uma esfera uniforme.

Solução.

Dentro da aproximação referida no enunciado, o momento angular da Terra vale:

$$L = Iw = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

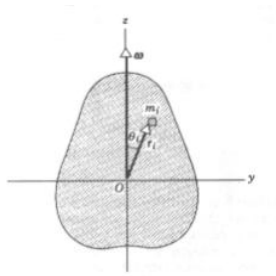
Na Eq. (1), M e R são a massa e o raio da Terra e T é o período de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo.

$$L = \frac{4\pi MR^2}{5T} = \frac{4\pi\left(5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}\right)\left(6{,}37\times10^{6}\ \text{m}\right)^2}{5\left(24\ \text{h}\times 3.600\ \dfrac{\text{s}}{\text{h}}\right)} = 7{,}0583\cdots\times10^{33}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

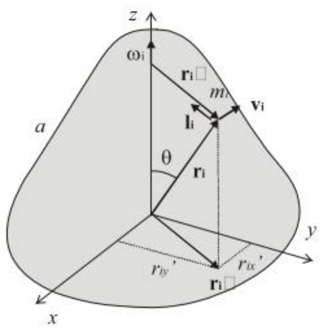
$$\boxed{L \approx 7{,}06\times10^{33}\ \text{kg.m}^2/\text{s}}$$

Questão – 9:

A Fig. mostra um corpo rígido simétrico girando em torno de um eixo fixo. Por conveniência, a origem das coordenadas é colocada no centro de massa. Divida o corpo em elementos de massa mi e, somando as contribuições destes elementos para o momento angular, mostre que o momento angular total L = Iw.



Vamos analisar o caso tridimensional, que é mais geral do que o apresentado na Fig.



Seja m_i um elemento de massa do corpo M, r_i a localização, v_i a velocidade linear e l_i o momento linear de m_i. Logo:

$$\mathbf{l_i} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i}$$

$$\mathbf{l_i} = \left(r_{xi}\mathbf{i} + r_{yi}\mathbf{j} + r_{zi}\mathbf{k}\right) \times m_i \left(v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j} + v_{zi}\mathbf{k}\right)$$

Como o movimento circular é em torno do eixo z, a velocidade linear tem componentes apenas em x e y.

$$\mathbf{l_i} = -m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + m_i\left(r_{xi}v_{yi} - r_{yi}v_{xi}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

A velocidade $\mathbf{v_i}$ do elemento de massa é dada por:

$$\mathbf{v_i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i}' \qquad (2)$$

Na Eq. (2), $\boldsymbol{\omega}$ é o mesmo para todos os elementos de massa. Multiplicando-se ambos os membros de (2) por $\mathbf{r_i}'$:

$$\mathbf{r_i}' \times \mathbf{v_i} = \mathbf{r_i}' \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i}'\right)$$

$$\mathbf{r_i}' \times \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_i}'.\mathbf{r_i}'\right)\boldsymbol{\omega} - \left(\mathbf{r_i}'.\boldsymbol{\omega}\right)\mathbf{r_i}'$$

O último termo entre parênteses é zero por se tratar de produto escalar entre vetores ortogonais. Logo:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i} = \frac{\mathbf{r_i}' \times \mathbf{v_i}}{\mathbf{r_i}'.\mathbf{r_i}'}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i} = \frac{r_{xi}v_{yi} - r_{yi}v_{xi}}{r_{xi}^2 + r_{yi}^2}\mathbf{k} = \frac{r_{xi}v_{yi} - r_{yi}v_{xi}}{r_i'^2}\mathbf{k}$$

Eliminando-se a notação vetorial:

$$r_{xi}v_{yi} - r_{yi}v_{xi} = \omega r_i'^2 \qquad (3)$$

Substituindo-se (3) em (1):

$$\mathbf{l_i} = -m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + m_i \omega r_i'^2\mathbf{k}$$

Somando-se os momentos angulares de todos os elementos de massa:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l_i} = -\sum m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + \sum m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + \sum m_i \omega r_i'^2\mathbf{k}$$

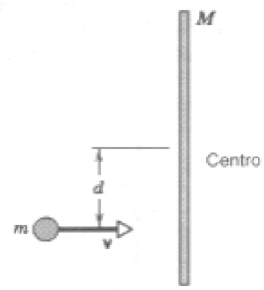
Por razões de simetria os dois primeiros termos do segundo membro resultam em zero. Portanto:

$$\mathbf{L} = \sum m_i \omega r_i'^2\mathbf{k} = \omega \sum m_i r_i'^2\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{L} = I\omega\mathbf{k}}$$

Questão-10:

Uma barra de comprimento L e massa M repousa sobre uma mesa horizontal sem atrito. Um taco de hóquei de massa m movendo-se com velocidade v, como mostra a Fig. , colide elasticamente com a barra. (a) Que grandezas são conservadas na colisão? (b) Qual deve ser a massa do taco para que ele fique em repouso após a colisão?



Solução.

(a) Ocorre conservação da energia cinética (colisão elástica), do momento linear total (ausência de força externa resultante) e do momento angular total (ausência de torque externo resultante).

(b) Como o taco não colide no centro de massa da barra, após a colisão haverá movimento de translação do centro de massa da barra (V) associado ao movimento de rotação da barra em torno de seu centro de massa (ω). Aplicando-se a conservação do momento linear:

$$P_0 = P$$

$$\boxed{mv = MV}$$

$$V^2 = \frac{m^2 v^2}{M^2} \qquad (1)$$

Aplicando-se a conservação da energia cinética:

$$K_0 = K$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$mv^2 = MV^2 + \frac{ML^2}{12}\omega^2 \qquad (2)$$

Aplicando-se a conservação do momento angular:

$$L_0 = L$$

$$\boxed{mvd = I\omega}$$

$$mvd = \frac{ML^2}{12}\omega$$

$$\omega^2 = \frac{12^2 m^2 v^2 d^2}{M^2 L^4} \qquad (3)$$

Substituindo-se (1) e (3) em (2):

$$mv^2 = M\frac{m^2 v^2}{M^2} + \frac{ML^2}{12}\frac{12^2 m^2 v^2 d^2}{M^2 L^4}$$

$$1 = \frac{mv}{M} + \frac{12md^2}{ML^2}$$

$$ML^2 = m\left(L^2 + 12d^2\right)$$

$$\boxed{m = \frac{ML^2}{L^2 + 12d^2}}$$

Questão – 11:

Suponha que o combustível nuclear do Sol se esgote e ele sofra um colapso brusco, transformando-se numa estrela anã branca com diâmetro igual ao da Terra. Supondo que não haja perda de massa, qual seria o seu novo período de rotação, sabendo-se que o atual é de 25 dias? Suponha que o Sol e a anã branca sejam esferas uniformes.

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação:

Considerando-se que durante no processo de colapso do Sol não há torques externos atuando sobre ele, o momento angular do sistema é conservado. Logo:

$$L_0 = L$$

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

$$\frac{2}{5}MR_0^2 \times \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{R_0^2}{T_0} = \frac{R^2}{T}$$

$$T = T_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = (25\text{ d})\left[\frac{(6{,}37\times10^6\text{ m})}{(6{,}96\times10^8\text{ m})}\right]^2 = 2{,}09411\cdots\times10^{-3}\text{ d}$$

$$\boxed{T \approx 180\text{ s}}$$

A situação descrita no enunciado deste problema deve realmente ocorrer daqui a muitos milhões de anos.

Questão – 12:

Quatro partículas são colocadas uma em cada canto de um quadrado, como mostra a Fig. 6.2. Considere que elas estejam ligadas por hastes de massas desprezíveis de 2 m de comprimento. Se M = 2 kg, qual o valor do momento de inércia do sistema em relação a um eixo de rotação que passa pelo ponto A, perpendicularmente ao plano da figura.

SOLUÇÃO: Na definição (6.8), o raio do círculo r_i é a distância da i-ésima partícula ao eixo de rotação. Assim,

$$\begin{aligned} I_A &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2 + m_D r_D^2 \\ &= 2\text{M}\times0 + \text{M}\,\text{L}^2 + 2\text{M}\left(\text{L}\sqrt{2}\right)^2 + \text{M}\,\text{L}^2 \\ &= (1+4+1)\text{M}\,\text{L}^2 = 6\,\text{M}\,\text{L}^2 \\ &= 6\times2\,\text{kg}\times(2\,\text{m})^2 \\ &= 48\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Observe que a massa que está "em cima" do eixo ($r_A = 0$) de rotação não contribui para o momento de inércia.

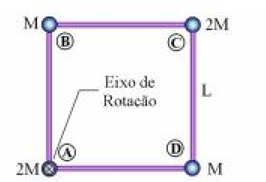


Fig. 6.2 Quatro massas, uma em cada canto de um quadrado, estão ligadas por hastes de massas desprezíveis. Elas giram em torno de um eixo que passa por A.

Questão – 13

Dois blocos, de massas m_1 e m_2, estão ligados por um cabo de massa desprezível que passa por uma roldana de massa M e raio R, como mostra a figura ao lado. Os blocos são liberados a partir do repouso. Despreze qualquer dissipação por atrito e considere $m_2 = 2m_1$ e $M = 4m_1$. (*a*) Faça um diagrama das forças que atuam nos blocos e na roldana. (*b*) Escreva as equações de movimento (2ª lei) para os blocos e para a roldana e determine suas acelerações. (*c*) Determine o valor da tensão em cada um dos ramos do cabo que liga os blocos para $m_1 = 10$ kg.

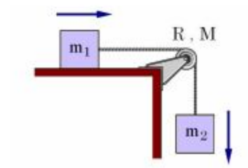
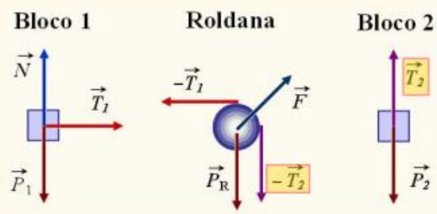


Fig. 6.7 Problema resolvido 6.3

SOLUÇÃO: **(*a*)** Diagrama de forças:



(***b***) As equações de movimento ficam:

Movimento de translação

Bloco 1

$x \rightarrow \quad \boxed{T_1 = m_1 a} \qquad (1)$

$y \rightarrow \quad \boxed{N - P_1 = 0} \qquad (2)$

Bloco 2

$Y \rightarrow \quad \boxed{P_2 - T_2 = m_2 a} \qquad (3)$

Movimento de Rotação

Roldana

$$\boxed{T_2 \; R - T_1 \; R = I_{CM}\,\alpha} = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \quad (4)$$

Antes de prosseguir:

1) Ao escrever as equações de movimento nós utilizamos o fato que as acelerações dos dois blocos são iguais ($a_1 = a_2 = a$) uma vez que a corda não estica e nem encolhe.

2) Consideramos também que a corda não desliza sobre a roldana para escrever que $v = R\omega$ e $a = R\alpha$.

3) A força $\vec{F}$ que aparece no diagrama de forças da roldana é exercida pelo eixo sobre a roldana de tal maneira que $\vec{F} + \vec{P}_R + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. Desta forma, a roldana não tem movimento de translação.

4) As forças $\vec{F}$ e $\vec{P}_R$ passam pelo eixo de rotação e por isso não produzem torque. Apenas as tensões geram torques.

5) Nós consideramos torques positivos aqueles que fazem a roldana girar no sentido horário.

Prosseguindo:

De (1) + (3) + (4), obtemos:

$$P_2 - P_1 = (m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}M)\,a$$

Portanto,

$$P_2 - P_1 = (m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}M)\,a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}}$$

Fazendo $m_2 = 2m_1$ e $M = 4m_1$ como diz o enunciado, temos:

$$a = \frac{2m - m}{m + 2m + \frac{1}{2}4m}\,g \; = \; \frac{1}{5}\,g$$

(***c***) Substituindo em (1) e em (3), segue

$$\boxed{T_1 = m_1 a} = 10\,\text{kg} \times \tfrac{1}{5} 10\,\text{m/s}^2 = 20\,\text{N} \quad \text{e}$$

$$\boxed{T_2 = m_2 (g - a)} = 20\,\text{kg} \times (1 - \tfrac{1}{5}) 10\,\text{m/s}^2 = 160\,\text{N}$$

Questão 14:

Uma roda gira com aceleração angular α dada por

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2$$

onde t é o tempo e a e b são constantes. Se a roda possui velocidade angular inicial ω_0, escreva as equações para (a) a velocidade angular da roda e (b) o ângulo descrito, como função do tempo.

Solução.

(a) Vamos partir da equação dada:

$$\frac{d\omega}{dt} = 4at^3 - 3bt^2$$

$$d\omega = \left(4at^3 - 3bt^2\right)dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \left(4at^3 - 3bt^2\right)dt$$

$$\omega - \omega_0 = at^4 - bt^3$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + at^4 - bt^3}$$

(b) Vamos partir do resultado do item (a):

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + at^4 - bt^3$$

$$d\theta = \left(\omega_0 + at^4 - bt^3\right)dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \left(\omega_0 + at^4 - bt^3\right)dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{at^5}{5} - \frac{bt^4}{4}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{at^5}{5} - \frac{bt^4}{4}}$$

Questão 15:

Qual é a velocidade angular (a) do ponteiro de segundos, (b) do ponteiro de minutos e (c) do ponteiro de horas de um relógio?

Solução.

(a)

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{(60\text{ s})} = 0{,}104719\cdots\text{rad/s}$$

$$\boxed{\omega \approx 0{,}105\text{ rad/s}}$$

(b)

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{(60\times 60\text{ s})} = 1{,}7453\cdots\times 10^{-3}\text{ rad/s}$$

$$\boxed{\omega \approx 1{,}75\times 10^{-3}\text{ rad/s}}$$

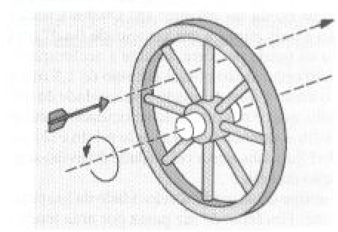
(c)

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{(12\times 60\times 60\text{ s})} = 1{,}4544\cdots\times 10^{-4}\text{ rad/s}$$

$$\boxed{\omega \approx 1{,}45\times 10^{-4}\text{ rad/s}}$$

Questão 16:

Uma roda de 30 cm de raio possui oito raios. Ela está montada em um eixo fixo e gira à razão de 2,5 rev/s. Você deseja atirar uma flecha de 24 cm de comprimento através da roda, paralelamente ao seu eixo, sem tocar seus raios. Admita que tanto a flecha como os raios são muito finos; veja a Fig. 14. (a) Qual é a velocidade mínima que a flecha pode ter? (b) É importante o ponto, entre o eixo e a borda da roda, que você mira? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?



Solução.

(a) A condição mínima para que a flecha consiga passar pela roda é que o tempo para a flecha percorrer seu próprio comprimento (l), t_f, deve ser igual ao tempo requerido para a roda percorrer 1/8 de sua circunferência, t_r:

$$t_f = t_r$$

$$\frac{l}{v} = \frac{1/8}{\omega}$$

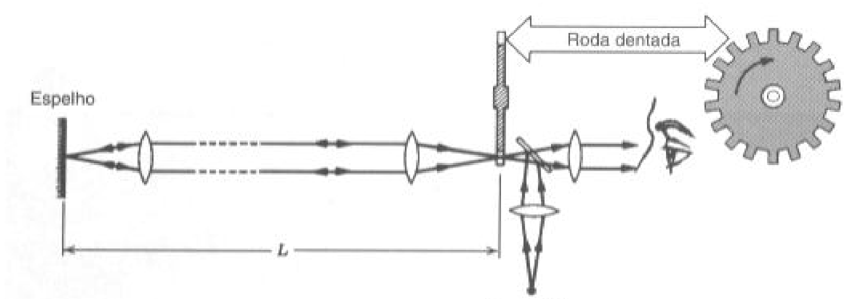
$$v = 8\omega l$$

$$\boxed{v = 4,8 \text{ m/s}}$$

(b) A distância que a flecha passa pela roda medida a partir do centro não é importante. Embora o espaço disponível para a flecha passar próxima ao centro seja menor, a velocidade tangencial da roda nessa região também é proporcionalmente menor.

Questão 17:

Um método antigo de se medir a velocidade da luz utiliza uma roda dentada girante. Um feixe de luz passa por uma fenda na borda da roda, como na Fig. 18, propaga-se até um espelho distante e retorna à roda no tempo exato para passar através da fenda seguinte na roda. Uma destas rodas dentadas possui raio de 5,0 cm e 500 dentes em sua borda. Medidas tomadas quando o espelho se encontrava à distância de 500 m da roda indicaram uma velocidade de 3,0 $\times 10^5$ km/s. (a) Qual era a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual era o módulo da velocidade linear de um ponto em sua borda?



Solução.

(a) O tempo de ida e volta da luz é igual ao tempo que a roda leva para girar $\Delta\phi = 2\pi/500$ rad. Para a luz:

$$v = c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2L}{t_{luz}}$$

$$t_{luz} = \frac{2L}{c} \qquad (1)$$

Para a roda:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{500.t_{roda}}$$

$$t_{roda} = \frac{2\pi}{500\omega} \qquad (2)$$

Igualando-se (1) e (2):

$$\frac{2L}{c} = \frac{2\pi}{500\omega}$$

$$\omega = \frac{\pi c}{500l} = 3.769,911\cdots \text{rad/s}$$

$$\boxed{\omega \approx 3,8\times 10^3 \text{ rad/s}}$$

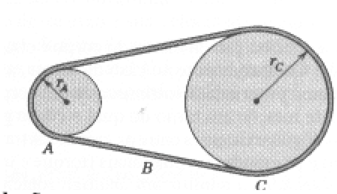
(b)

$$v = \omega r = 188,4955\cdots \text{m/s}$$

$$\boxed{v \approx 1,9\times 10^2 \text{ m/s}}$$

Questão 18:

Uma roda A de raio r_A = 10,0 cm está acoplada por uma correia B à roda C de raio r_C = 25,0 cm, como mostra a Fig. 19. A roda A aumenta sua velocidade angular à razão uniforme de 1,60 rad/s^2. Determine o tempo necessário para que a roda C atinja uma velocidade rotacional de 100 rev/min; suponha que não haja deslizamento da correia. (Dica: Se a correia não desliza, os módulos das velocidades lineares na borda das duas rodas são iguais.)



Solução.

O tempo procurado pode ser obtido a partir da equação de movimento acelerado da roda C:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_C = \omega_{C0} + \alpha_C t$$

$$t = \frac{\omega_C}{\alpha_C} \qquad (1)$$

Embora as acelerações angulares das rodas C (α_C) e A (α_A) sejam diferentes, suas acelerações tangenciais (a_C e a_A) são iguais, pois é a mesma aceleração da correia B.

$$a_A = a_C$$

$$\alpha_A r_A = \alpha_C r_C$$

$$\alpha_C = \frac{\alpha_A r_A}{r_C} \qquad (2)$$

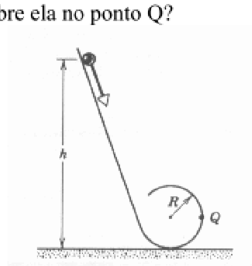
Substituindo-se (1) em (2):

$$t = \frac{\omega_C r_C}{\alpha_A r_A} = 16,3624\cdots \text{s}$$

$$\boxed{t \approx 16,4 \text{ s}}$$

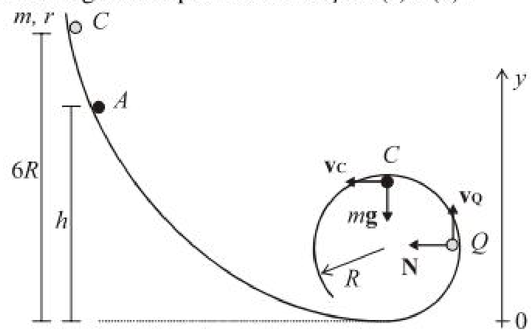
Questão 19:

. Uma bolinha compacta de massa m e raio r rola sem deslizar ao longo do trilho em curva mostrado na Fig. 50, tendo sido abandonada em repouso em algum ponto da região reta do trilho. (a) De que altura mínima, a partir da base do trilho, a bolinha deve ser solta para que percorra a parte superior da curva? (O raio da curva é R; suponha que $R >> r$). (b) Se a bolinha for solta da altura $6R$ acima da base do trilho, qual a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto Q?



Solução.

Considere o seguinte esquema das situações (a) e (b):



(a) Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica aos pontos A e C:

$$E_A = E_C$$

$$K_A + U_{gA} = K_C + U_{gC}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega_C^2 + mg2R$$

Sabendo-se que o momento de inércia de uma esfera sólida de raio r e massa m é $2mr^2/5$ e aplicando-se a relação $v = \omega r$:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{5}\frac{v_C^2}{r^2} + 2mgR$$

$$2gh = v_C^2 + \frac{2v_C^2}{5} + 4gR$$

$$h = \frac{7v_C^2}{10g} + 2R \qquad (1)$$

A condição mínima para que a esfera possa dar a volta em torno do círculo de raio R é que no ponto C a força centrípeta do movimento circular seja igual ao peso da esfera:

$$F_c = P$$

$$\frac{mv_C^2}{R} = mg$$

$$v_C^2 = gR \qquad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$h = \frac{7R}{10} + 2R$$

$$\boxed{h = \frac{27R}{10}}$$

(b) Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica aos pontos B e Q:

$$E_B = E_Q$$

$$K_B + U_{gB} = K_Q + U_{gQ}$$

$$0 + mg6R = \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2}I\omega_Q^2 + mgR$$

$$6mgR = \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{5}\frac{v_Q^2}{r^2} + mgR$$

$$12gR = v_Q^2 + \frac{2v_Q^2}{5} + 2gR$$

$$10gR = \frac{7v_Q^2}{5}$$

$$v_Q^2 = \frac{50}{7}gR \qquad (3)$$

A componente horizontal da força que age na esfera no ponto Q (força normal, **N**) é a força centrípeta do movimento circular da esfera naquela posição:

$$N = F_c$$

$$N = \frac{mv_Q^2}{R} \qquad (4)$$

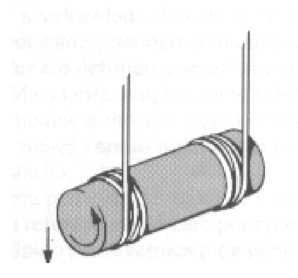
Substituindo-se (3) em (4):

$$N = \frac{m}{R}\frac{50}{7}gR$$

$$\boxed{N = \frac{50}{7}mg}$$

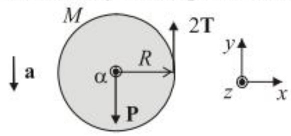
Questão 20:

Um cilindro maciço de comprimento L e raio R tem peso P. Duas cordas são enroladas em torno do cilindro, perto de cada borda, e as pontas das cordas são presas a ganchos no teto. O cilindro é mantido na horizontal com as duas cordas exatamente verticais e então é abandonado (Fig. 51). Ache (a) a tração em cada corda enquanto elas se desenrolam e (b) a aceleração linear do cilindro enquanto ele cai.



Solução.

(a) Considere o seguinte esquema das forças que agem sobre o cilindro:



Torques em z:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$R.2T = \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{a}{R}\right)$$

$$T = -\frac{Pa}{4g} \qquad (1)$$

Análise da translação do cilindro:

$$\sum F_y = Ma_y$$

$$2T - P = \frac{P}{g}a$$

$$a = \frac{g}{P}(2T - P) \qquad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2):

$$T = -\frac{P}{4g}\frac{g}{P}(2T - P)$$

$$4T = P - 2T$$

$$\boxed{T = \frac{P}{6}} \qquad (3)$$

(b) Substituindo-se (3) em (2):

$$a = \frac{g}{P}\left(2\frac{P}{6} - P\right) = g\left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$\boxed{a = -\frac{2g}{3}}$$