Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Paulo Moscon

Nome:

Matrícula:

1^a Prova de Ciência de Matereiais - 2018/02

Questão 1) [3,0] Calcule $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e σ_x para a função de onda normalizada

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Dado: $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(x^2 + a^2) = \pi/a$.
Obs: σ_x corresponde ao desvio quadrático médio com relação ao valor médio da variável x (o mesmo desvio padrão estudado em disciplinas experimentais).

Solução:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, x\, \psi^*(x)\, dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a^3}{\pi} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} \cdot x\, dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{2a^3}{\pi} \cdot \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, x \cdot dx$$

$$u = x^2 + a^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{2a^2}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-2}\, du$$

$$\langle x \rangle = \frac{a^2}{\pi} \cdot \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle x \rangle = -\frac{a^2}{\pi} \left[\frac{1}{(x^2+a^2)} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\boxed{\langle x \rangle = -\frac{a^3}{\pi} \left[0 - 0 \right] = 0}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a^3}{\pi}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\cdot x^2\,dx$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^3}{a^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}\,dx$$

$$\frac{x}{a} \equiv tag(\theta) \qquad dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$\begin{cases} x^2 = a^2\,tag^2(\theta) \\ 1 + tag^2(\theta) = \sec^2(\theta) \end{cases}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2\,tag^2(\theta)\cdot a\sec^2(\theta)\,d\theta}{\left[1+tag^2(\theta)\right]^2}$$

limites em $\underline{\theta}$ $\qquad -\infty < x < \infty \implies -\frac{\pi}{2} \lesssim \theta \lesssim \frac{\pi}{2}$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^3}{a\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{tag^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}\,d\theta \qquad \text{pois} \qquad \left[1+tag^2(\theta)\right]^2 = \sec^4(\theta)$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{sen^2(\theta)}{\cancel{\cos^2(\theta)}}\cdot\cancel{\cos^2(\theta)}\,d\theta = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen^2(\theta)\,d\theta$$

Lembrar $\quad sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

$$\Rightarrow \cos(2x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2\,sen^2(x)$$

$$\Rightarrow -1 + 2\,sen^2(x) = -\cos(2x)$$

$$sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2a^2}{2\pi}\left[\theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)\right]$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{\pi}\times 2\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\langle x^2\rangle = a^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{a^2 - 0}$$

$$\boxed{\sigma_x = a}$$

Questão 2) [2,0] Um átomo (que não é o átomo de hidrogênio) absorve um fóton com comprimento de onda $\lambda = 375$ nm e emite um fóton com comprimento de onda $\lambda = 580$ nm. Qual a energia absorvida pelo átomo no processo.

Energia de um fóton é $E = h.\nu$; $c = \lambda \nu$

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Sendo $h = 6,6 \times 10^{-34}\ m^2\ kg/s$

$c = 3 \times 10^8\ m/s$

Absorveu $E_{ab} = \dfrac{6,6 \times 3 \times 10^{-34} \times 10^{8}}{375 \times 10^{-9}}$ Joules $= 0,0528 \times 10^{-17}\ J$

Emitiu $E_{em} = \dfrac{6,6 \times 3 \times 10^{-34} \times 10^{8}}{580 \times 10^{-9}}$ Joules $= 0,0341 \times 10^{-17}\ J$

Recebeu mais que emitiu $\Delta E = E_{ab} - E_{em} = 0,0187 \times 10^{-17}\ J$

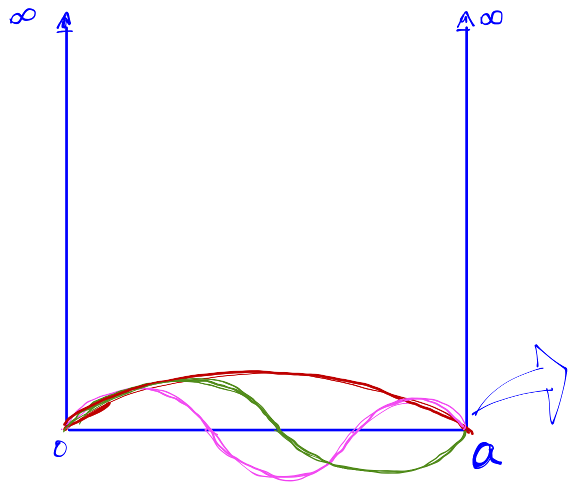
$$\boxed{\Delta E = +\ 1,87 \times 10^{-19}\ J}$$

ou em eV $\qquad 1\ eV = 1,6 \times 10^{-19}\ J$

$\Delta E = \dfrac{1,87}{1,6} \cdot eV$ $\qquad \boxed{\Delta E \simeq +\ 1,17\ eV}$

Questão 3) [2,5] Obtenha as energias possíveis (em função do número inteiro n) para um elétron preso em um condutor linear de comprimento a (poço de potencial infinito de comprimento a). OBS: Podem utilizar a resolução intuitiva como apresentada em sala. Basta obter os $k = 2\pi/\lambda$, em função de a, possíveis; construir o k geral (em função de n) e utilizálo na equação de energia dada por

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



Pois como a função de onda representa "densidade de probabilidade"; a onda de ser nula fora do condutor.

Possibilidades: $a = 1\frac{\lambda}{2}$; $a = 2\frac{\lambda}{2}$; $a = 3\frac{\lambda}{2}$ ... $a = n\frac{\lambda}{2}$

sendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ inteiro.

$\Rightarrow \lambda = \frac{2a}{n}$

também $K = \frac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow K = \frac{2\pi}{2a} \cdot n$

$$K = \frac{\pi}{a} n$$

Energia: $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} \cdot n^2}$$

Questão 4) [2,5] Calcule a menor quantidade de energia radiante que um corpo pode emitir: **(a)** de luz azul cujo comprimento de onda é 470 nm; **(b)** de luz vermelha cujo comprimento de onda é 700 nm.

A luz é quantizada por fótons. Portanto, emite energia múltipla de fótons, cada um com $E = h\nu$.

O mínimo de emissão é a emissão de um único fóton.

Azul: $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,6 \times 3 \times 10^{-34} \times 10^{8}}{470 \times 10^{-9}}$ J

$$\boxed{E_{azul} \cong 0,042 \times 10^{-17}\,J \quad \text{ou} \quad E_{azul} = 2,63\ eV}$$

Vermelho: $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \times 10^{8}}{700 \times 10^{-9}}$ J

$$\boxed{E_{verm} = 0,028 \times 10^{-17}\,J \quad \text{ou} \quad E_{verm} = 1,75\ eV}$$