Gabarito da 2 prova de Ciência de Materiais

Paulo Moscon

2012-10-30

Questão 1) Usando o princípio de mecânica dos materiais (condição de equilíbrio e projeção de força e área), derive as equações para as tensões de tração e de cisalhamento relativos à área A', representada na Fig.(1)

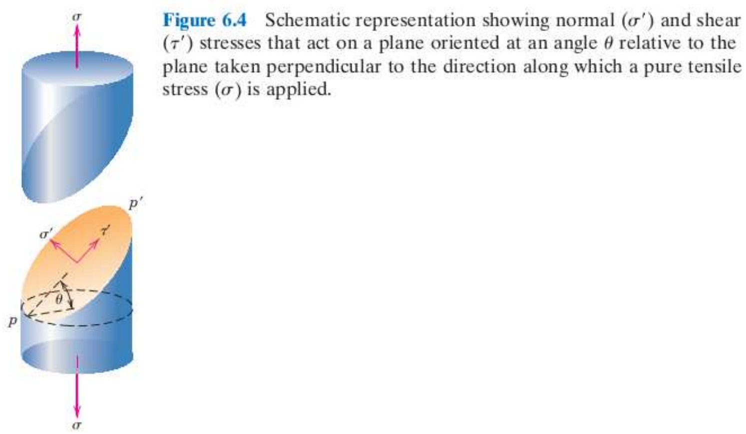

Figura 1: Tensão em uma área transversal A, projetada sobre uma área A'

Solução: ***(a)***O procedimento consiste em projetar a força $\overrightarrow{F}$ na direção perpendicular à área $\overrightarrow{A'}$. Deve-se notar tambem que a área $\overrightarrow{A'}$ possui relação com a área $\overrightarrow{A}$, mas neste caso a área $\overrightarrow{A}$ é que é uma projação de $\overrightarrow{A'}$. Isto posto em uma linguagem matemática fica na forma

$$F' = F\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad A = A'\cos(\theta) \tag{1}$$

Temos que $\sigma' = \frac{F'}{A'}$, o que resulta em

$$\sigma' = \frac{F\cos\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \frac{F}{A}\cos^2(\theta). \tag{2}$$

Portanto

$$\sigma' = \sigma\cos^2(\theta). \tag{3}$$

(b) Para a tensão de cisalhamento devemos considerar a componente da força que é paralela à superficie plana da área A', portanto devemos considerar $F_{//} = F\sin(\theta)$. Esta componente da força continua atuando sobre a área A' (relação 1 (b)). Como $\tau' = \frac{F_{//}}{A'}$ temos que

$$\tau' = \frac{F\sin(\theta)}{\frac{A}{\cos(\theta)}} = \frac{F}{A}\sin(\theta)\cos(\theta) = \sigma\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{4}$$

O segundo termo desta equação pode ser colocado em termos de uma única função de θ. Para isso abrimos mão da relação trigonométrica $\sin(\theta+\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ que utilizada na Equação (4), faz resultar em

$$\tau' = \frac{\sigma\sin(2\theta)}{2} \tag{5}$$

Questão 2) Um teste de tensão é realizado em uma amostra de metal e é encontrado que uma deformação plástica verdadeira de $0,20$ é produzida quando uma tensão verdadeira de 575MPa é aplicada; para o mesmo metal, o valor de K na Equação (6), para a tensão verdadeira, é de 860MPa. Calcule a deformação verdadeira que resulta de uma aplicação de uma tensão verdadeira de 600MPa.

$$\sigma_T = K\epsilon_T^n \tag{6}$$

Solução: Aqui a solução é realmente simples ao extremo. Basta aplicarmos a situação conhecida na Equação (6), retirarmos o valor da constante que nos falta e então aplicarmos novamente na situação onde uma das variáveis não é conhecida. Portanto,

$$575.10^3\text{Pa} = 860.10^3\text{Pa}.0,20^n$$
$$\rightarrow 0,20^n = \frac{575}{860}$$

aplicando logarítimo neperiano em ambos os lados temos

$$\ln\left(0,20^n\right) = \ln\left(\frac{575}{860}\right)$$
$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{575}{860}\right)}{\ln(0,20)}$$

$$n = 0,25$$

Portanto, reaplicando a Equação (6) para o segundo caso temos

$$600\text{MPa} = 860\text{MPa}\epsilon_T^{0,25}$$
$$\epsilon_T^{0,25} = \frac{600\text{MPa}}{860\text{MPa}}$$
$$\left(\epsilon_T^{0,25}\right)^{\frac{1}{0,25}} = \left(\frac{600}{860}\right)^{\frac{1}{0,25}} \Rightarrow \epsilon_T = \left(\frac{600}{860}\right)^{\frac{1}{0,25}}$$

$$\epsilon_T \approx 0,24$$

Questão 3)

Solução: Em primeiro lugar devemos notar que o conjunto cobre e niquel encontra-se em um percentual relativo (em peso) dado por C_0 de níquel e $1-C_0$ de cobre; e a uma temperatura T, tal que esta temperatura coloca o conjunto na região $\alpha+$ Líquid do diagrama de fases. A linha horizontal que passa pelo ponto $B(T_0, C_0)$ conecta a composição C_L onde C_L de níquel mais $1-C_L$ de cobre estariam no estado líquido, até a composição relativa onde o conjunto está solidificado (*Obs: Como a linha considerada é horizontal, a temperatura é constante* $\Rightarrow$ *o parâmetro que leva o conjunto todo a estar no etado líquido ou no estado solido é apenas a composição*). Levando-se em conta este fato, temos que o conjunto binário é 100% líquido na composição C_L de níquel e 100% sólido na composição C_α de níquel. Em qualquer posição sabemos que a soma do percentual em estado líquido mais o percentual em estado sólido deve dar 100% (ou equivalentemente 1); portanto em uma composição intermediária C_0 de níquel temos, se considerarmos que o percentual de níquel está aumentando, que $C_0 - C_L$ está crescendo desde um valor de 0% de fase solida (quando $C_0 = C_L$) ate um valor de 100% de fase sólida (quando $C_0 = C_\alpha$). Se considerarmos que este processo é linear, então em uma posição intermediária temos que

$$C_L W_L + C_\alpha W_\alpha = C_0 \tag{7}$$

A equação acima representa: C_L é o peso que a proximidade com este percentual de composição exerce para que o cunjunto fique na fase líquida; inversamente C_α é o peso que a proximidade com este percentual de composição exerce para que o conjunto fique na fase sólida. "algo como uma média ponderada". Note que caminhando para a direita W_L vai diminuindo seu valor e W_α vai crescendo até que quando C_0 atinge o ponto C_α, então $W_L = 0$ resultando em $W_\alpha = C_\alpha/C_\alpha \Rightarrow W_\alpha = 1$, como deve ser.

Isolando um dos dois percentuais, digamos W_α, temos

$$W_\alpha = -\frac{C_L}{C_\alpha}W_L + \frac{C_0}{C_\alpha} \tag{8}$$

que traduz o comportamento linear comentado anteriormente.
Adicionalmente a soma entre os percentuais de sólido e de líquido deve ser 1

$$\rightarrow W_L + W_\alpha = 1 \tag{9}$$

Juntando as Equações 8 e 9 resulta que

$$W_\alpha = \frac{C_L}{C_\alpha}(W_\alpha - 1) + \frac{C_0}{C_\alpha}$$
$$W_\alpha = \frac{C_L}{C_\alpha}W_\alpha - \frac{C_L}{C_\alpha} + \frac{C_0}{C_\alpha}$$
$$W_\alpha\left(1 - \frac{C_L}{C_\alpha}\right) = \frac{C_0 - C_L}{C_\alpha}$$
$$W_\alpha\left(\frac{C_\alpha - C_L}{C_\alpha}\right) = \frac{C_0 - C_L}{C_\alpha}$$
$$W_\alpha = \frac{C_0 - C_L}{C_\alpha - C_L} \tag{10}$$

Inserindo a Equação (10) na Equação (9) encontra-se a relação para W_L pedida.

Questão 4) Estime **(a)** a magnetização de saturação e **(b)** a densidade de fluxo de saturação de uma ferrita de nickel $[(NiFe_2O_4)_8]$, cuja célula unitária possui aresta com comprimento de 0,8337mm.

Dicas: 1) Os momentos magnéticos vêm dos ions de Ni^{2+}, os quais existem oito por célula; 2) O ion Ni^{2+} possui momento magnético igual a dois magnetons de Bohr.

Solução: As ferrites de níquel são um material ferrimagnético que cristaliza numa estrutura de espinela inversa do tipo $A^{2+}B_2^{3+}O_4$. As espinelas tem uma estrutura unitária ocupada com 32 aniões de O^{2-} e com 8 catiões de níquel (Ni) nos sítios tetraédricos (A) e com sítios octaédricos (B) ocupados com 16 catiões de Ferro (Fe). Portanto temoa, como colocado na dica (1), oito ions de Ni^{2+} dentro de uma célula unitária.

Cada magneton de Bohr equivale a um momento de dipolo magnético elementar de $\mu_B = 9,274.10^{-24}$J/T.

(a) Magnetização de saturação representa o momento magnético por unidade de volume quando todos os momentos magnéticos estão paralelos e apontando para um mesmo sentido. Para o nosso caso, devemos simplesmente divitir a quantidade de magnetons de Bohr dentro de uma célula unitária e dividir pelo volume da célula.

Como dado, cada célula unitária possui oito ions de Ni^{2+}, e cada ion colabora com dois magnetons de Bohr. Portanto, cada célula possui $16\mu_B$. A ferrita de niquel possui uma estrutura cubica; a aresta foi dada, logo o voluma da célula é

$$V = a^3 = \left(0,8337.10^{-9}\right)^3 \text{m}^3$$

$$V = 0,5795.10^{-27}\text{m}^3$$

Finalmente,

$$M_s = \frac{16\mu_B}{0,5795}.10^{27}\frac{J}{Tm^3}$$

computanto,

$$M_s = 256,0552 \cdot 10^3 \frac{J}{Tm^3} \approx 2,56 \cdot 10^5 \frac{J}{Tm^3}$$

(b) A magnetização relaciona-se com a densidade de fluxo magnético (B) na forma

$$B = \mu_0 (H + M)$$

Em nosso caso não existe um campo externo atuando sobre a ferrita de niquel, portanto $H = 0$. Assim a densidade de fluxo magnético tem relação direta com a magnetização. Se a magnetização estiver na situação de saturação então

$$B_s = \mu_0 M_s \qquad \rightarrow B_s = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,56 \cdot 10^5 \frac{T.m}{A}\frac{J}{T.m^3}$$

A unidade tesla (T) pode ser escrita, entre outras, na forma 1T=1N/$(A\cdot m)$. Da solução acima temos a dimensão de J/$(A.m^2)$. Joule pode ser colocado na forma N·m $\Rightarrow$

$$\frac{J}{A.m^2} = \frac{N.m}{A.m^2} = \frac{N}{A.m} \rightarrow \text{Portanto a unidade obtida é o Tesla, como deve ser.}$$

Computando temos que

$$B_s = 3,2 \cdot 10^{-1} T$$