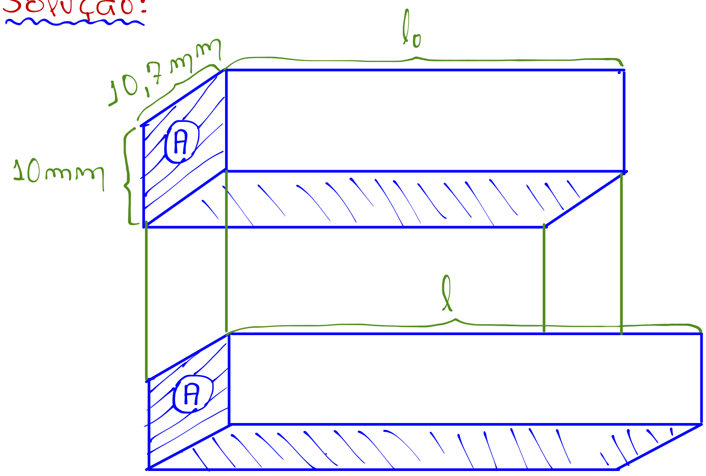
Problema:

6.3 Um corpo de prova de alumínio que possui uma seção reta retangular de 10 mm × 12,7 mm (0,4 pol. × 0,5 pol.) é puxado em tração com uma força de 35.500 N (8000 lb_f), produzindo apenas uma deformação elástica. Calcule a deformação resultante.

Solução:

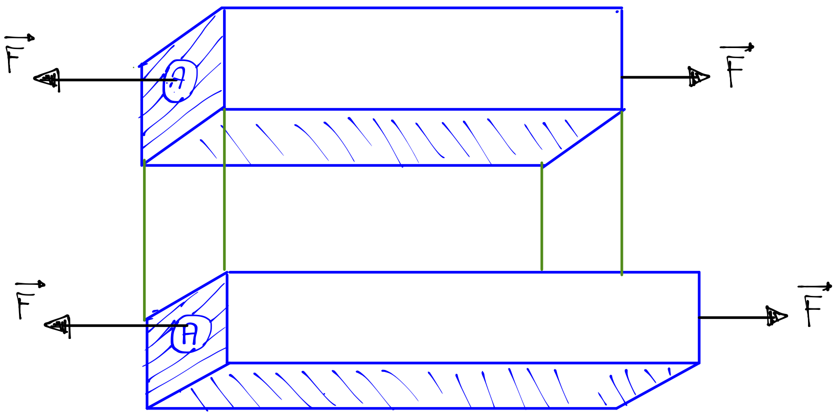


A = área transversal

Deformação resultante ≡ ε.

$$\varepsilon \equiv \frac{l - l_0}{l_0}$$

Força de tração: Força que promove afastamento entre faces paralelas.



Definições: $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$

Para pequenas deformações pode-se considerar uma relação linear entre F e Δl.

$$F \propto \Delta l$$

A fim de obter-se uma característica geral, independente da forma do corpo de prova, trabalha-se com tensão σ e deformação ε;

$$\sigma \equiv \frac{F}{A_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l_0}.$$

No limite linear

$$\sigma \propto \varepsilon$$

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

ε → Deformação (Percentual)

E → Constante de proporcionalidade → Módulo de Young.

σ → Tensão (Pode ser de tração ou de compreção).

O Módulo de Young é uma característica intrínseca dos materiais, representando sua dureza.

Solução do problema específico

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \sigma = \frac{F}{A_0} \quad \text{e} \quad E = E_{\text{alumínio}} \Rightarrow \text{tabelado.}$$

Tabela 6.1 Módulos de Elasticidade e de Cisalhamento, e Coeficiente de Poisson para Várias Ligas Metálicas a Temperatura Ambiente

Liga Metálica	*Módulo de Elasticidade* GPa	*Módulo de Elasticidade* 10^6 psi	*Módulo de Cisalhamento* GPa	*Módulo de Cisalhamento* 10^6 psi	*Coeficiente de Poisson*
Alumínio	69	10	25	3,6	0,33
Latão	97	14	37	5,4	0,34
Cobre	110	16	46	6,7	0,34
Magnésio	45	6,5	17	2,5	0,29
Níquel	207	30	76	11,0	0,31
Aço	207	30	83	12,0	0,30
Titânio	107	15,5	45	6,5	0,34
Tungstênio	407	59	160	23,2	0,28

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{F}{A_0 E} = \frac{35500}{10 \times 12,7 \times 69 \times 10^{-6} \times 10^{9}}$$

$$\varepsilon \simeq 4,05 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{\varepsilon \simeq 4,1 \times 10^{-3}}$$

Note que a resposta foi dada com dois algarismos significativos. (Por quê?).

6.14 Um corpo de prova cilíndrico de alumínio com diâmetro de 19 mm (0,75 pol.) e comprimento de 200 mm (8,0 pol.) é deformado elasticamente em tração com uma força de 48.800 N (11.000 lb_f). Usando os dados fornecidos na Tabela 6.1, determine o seguinte:

(a) A quantidade segundo a qual este corpo de prova irá se alongar na direção da tensão aplicada.
(b) A variação no diâmetro do corpo de prova. O diâmetro irá aumentar ou diminuir?

Solução:

(a) Dados: $d_0 = 19 \times 10^{-3}$ m $\quad F = 48800$ N

$l_0 = 200 \times 10^{-3}$ m $\quad E_{Al} = 69 \times 10^{9}$ N/m²

$(l - l_0) = ?$

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

$$\sigma = E\,\frac{(l-l_0)}{l_0}$$

$$l - l_0 = \frac{l_0 \sigma}{E}$$

$$\Delta l = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{F}{A_0} = \frac{l_0\,F}{E\,\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^2}$$

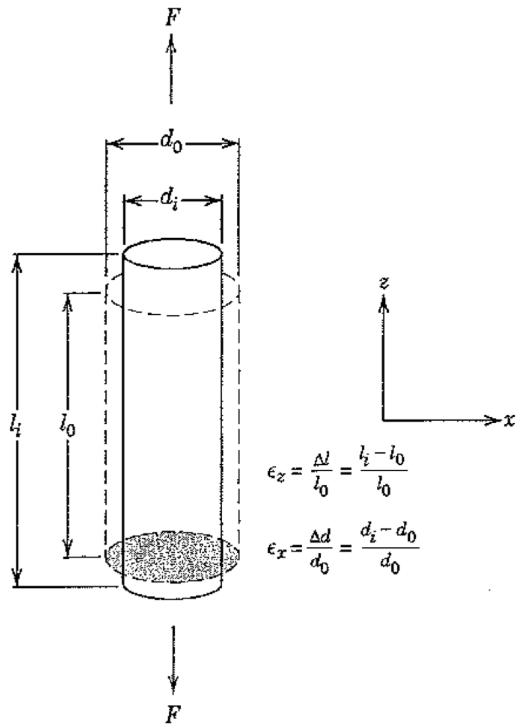
$$\Delta l = \frac{4 \times 200 \times 48800}{69 \times \pi \cdot 19^2} \times \frac{10^{-3}}{10^{9} \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta l \simeq 498{,}9 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta l \simeq 0{,}50 \text{ mm}}$$

→ Novamente, notem a quantidade de algarismos significativos utilizados no resultado. "Por quê?"

(b) Para responder esta questão devemos verificar a relação entre a deformação linear e a consequente deformação transversal.



A relação entre as distensões longitudinal e transversal define o coeficiente de Poisson, ν;

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z},$$

$$\nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}.$$

Se o material for isotrópico

$$\Longrightarrow \nu_{xz} = \nu_{yz}.$$

Note que ν é sempre positivo, pois $\varepsilon_{transversa}$ e $\varepsilon_{longitudinal}$ tem sempre sinais opostos.

Solução da letra (b).

Como trata-se de tração, então o diâmetro vai diminuir pois $\nu > 0$ sempre e, no caso, $\varepsilon_z > 0 \Longrightarrow \varepsilon_d < 0$.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A\,E} = \frac{F}{\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 . E} \quad \text{ou então} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0}$$

$$\Longrightarrow \nu = -\frac{\Delta d}{d_0} \cdot \frac{l_0}{\Delta l} \qquad \Longrightarrow \quad \Delta d = -\frac{\nu\, d_0\, \Delta l}{l_0}$$

$\nu = 0,33$ para o Al.

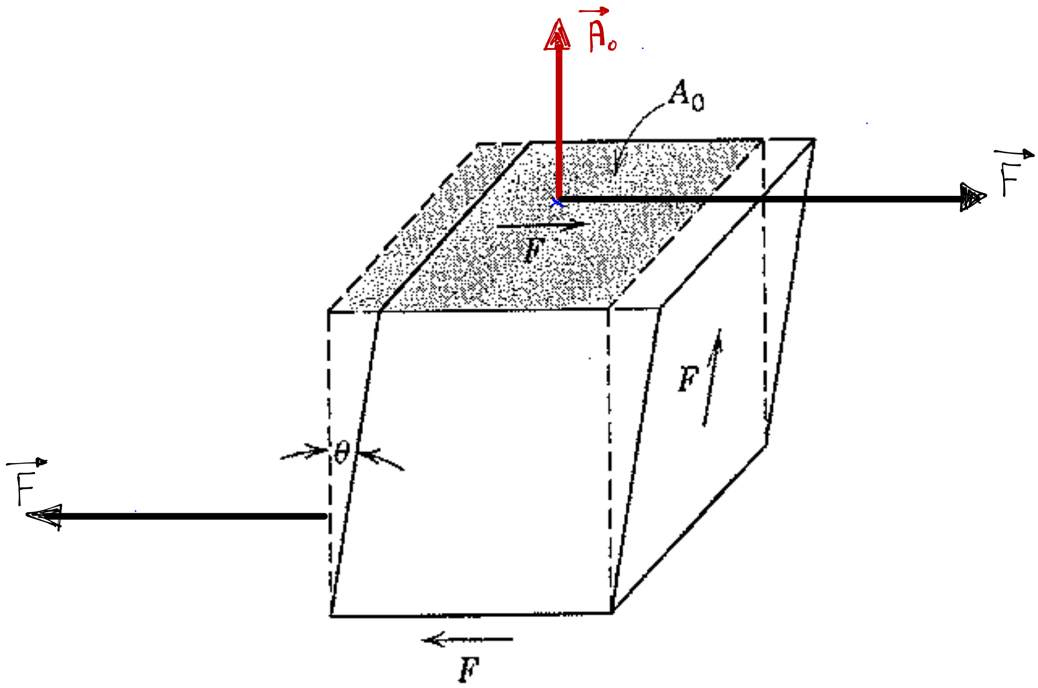
$$\Delta d = -\frac{0,33 \times 19 \times 0,50}{200}$$

$$\boxed{\Delta d = -0,016 \text{ mm}}$$

6.17 Um corpo de prova cilíndrico de uma liga metálica hipotética é tensionado em compressão. Se os seus diâmetros original e final são de 20,000 e 20,025 mm, respectivamente, e o seu comprimento final é de 74,96 mm, calcule o seu comprimento original se a deformação ocorrida é totalmente elástica. Os módulos de elasticidade e de cisalhamento para esta liga são de 105 GPa e 39,7 GPa, respectivamente.

Pare resolvermos este problema precisamos introduzir o conceito de cisalhamento.

Trata-se da deformação produzida por forças perpendiculares ao vetor área.



As forças, na configuração acima, promovem deformação angular.

O módulo da tensão de cisalhamento é definido por τ;

$$\tau = \frac{F}{A_0},$$

onde F é a força paralela à face (ou perpendicular ao vetor área).

A deformação de cisalhamento é definida através do ângulo θ (veja Figura).

$$\boxed{\gamma \equiv \tan(\theta)}$$

$\Rightarrow$ $\tau = G\gamma$

- γ → Deformação
- G → Módulo de cisalhamento
- τ → Tensão de cisalhamento.

Para este problema em particular as definições acima não serão aplicadas (note que não é um problema de cisalhamento). Contudo, o conceito de cisalhamento foi introduzido (mencionado) visando a aplicação de uma relação entre as constantes de cisalhamento e de deformação:

$$\boxed{E = 2G(1+\nu)}$$

Solução: Dados

$d_0 = 20{,}000$ mm
$d = 20{,}025$ mm
$l = 74{,}96$ mm
$l_0 = ?$
$E = 105$ GPa
$G = 39{,}7$ GPa

tração de compressão $\rightarrow$ diâmetro aumenta e comprimento diminui.

Para l_0 temos:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \rightarrow \varepsilon l_0 = l - l_0$$

$$l_0(\varepsilon_z + 1) = l$$

$$l_0 = \frac{l}{(\varepsilon_z + 1)} \quad (1)$$

Precisamos de ε_z; temos E, G $\Rightarrow$ Pode ser que a relação

$E = 2G(1+\nu)$ forneça ε, pois $\nu = -\dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z}$

sendo $\varepsilon_d = \dfrac{\Delta d}{d_0}$ (dado) $\Rightarrow$ $\varepsilon_d = \dfrac{20{,}025 - 20{,}000}{20{,}000} = 0{,}00125$

$$\Rightarrow E = 2G - 2G\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z}$$

$$2G\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z} = 2G - E$$

$$\varepsilon_z = \frac{2G\varepsilon_d}{(2G - E)} \quad (2)$$

(2) em (1)

$$l_0 = \frac{l}{\left(\dfrac{2G\varepsilon_d}{2G - E} + 1\right)}$$

$$l_0 = \frac{74{,}96}{\left(\dfrac{2 \times 39{,}7 \times 0{,}00125}{2 \times 39{,}7 - 105} + 1\right)} \, m$$

$$\boxed{l_0 = 75{,}25 \, mm}$$

6.25 A Fig. 6.21 mostra o comportamento tensão-deformação de engenharia em tração para uma liga de aço.

(a) Qual é o módulo de elasticidade?
(b) Qual é o limite de proporcionalidade?
(c) Qual é o limite de escoamento para uma pré-deformação de 0,002?
(d) Qual é o limite de resistência à tração?

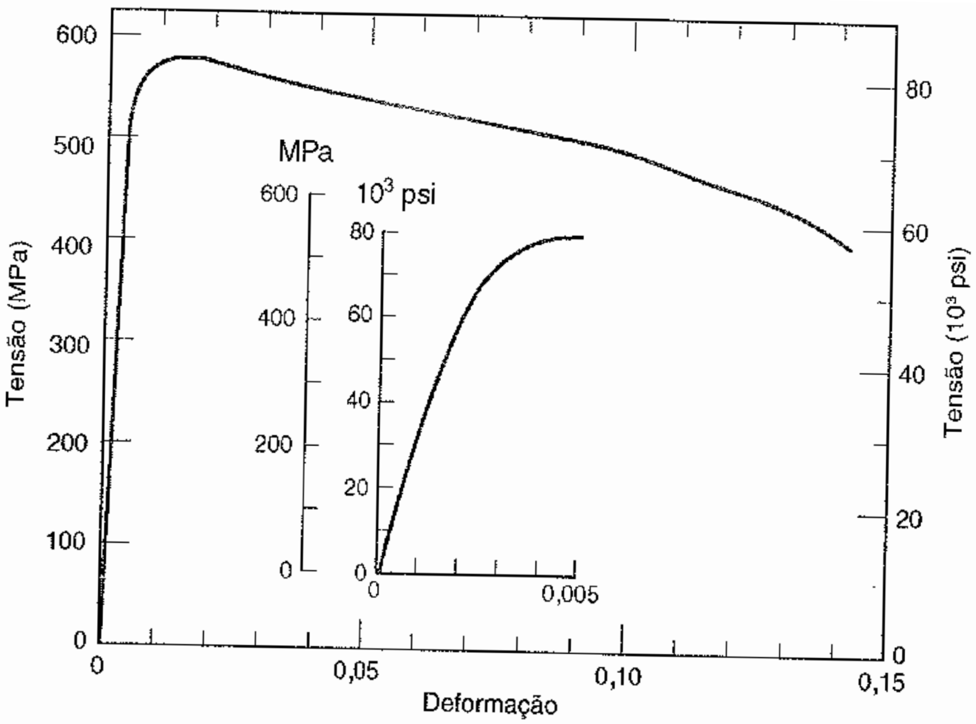
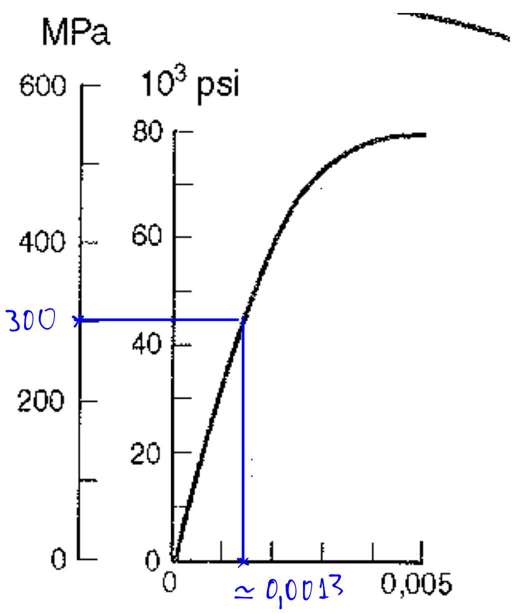


Fig. 6.21 Comportamento tensão-deformação em tração para um aço carbono simples.

(a) $\sigma = E\,\varepsilon \longrightarrow E =$ inclinação da curva $[\tan(\theta)]$



Basta pegarmos uma região linear qualquer.

$$E \simeq \frac{300}{0{,}0013} \text{ MPa}$$

$$E \simeq 230769 \text{ MPa}$$

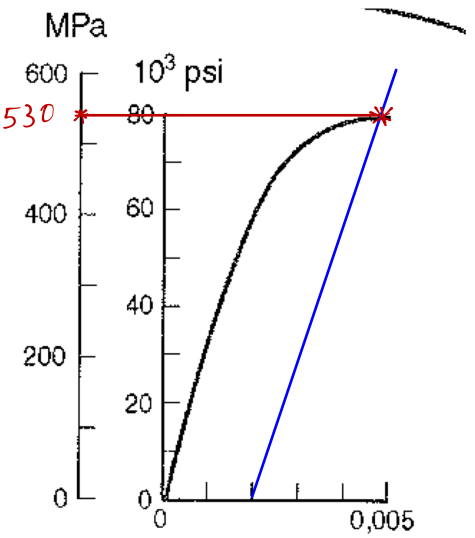
$$E \simeq 231 \text{ GPa}$$

(b) Basta verificarmos, aproximadamente, onde a curva começa a apresentar curvatura diferente de zero.

≈ 400 MPa.

(c) Limite de escoamento ≈ 530 MPa, obtido através da interseção de uma reta (saindo de $\varepsilon = 0{,}002$, com inclinação similar à região linear) com a curva original.

Limite de escoamento } ≈ 530



(d) Limite de resistência à tração é definido como a região a partir da qual a deformação continua aumentando com decréscimo da tensão *

~ 580 MPa

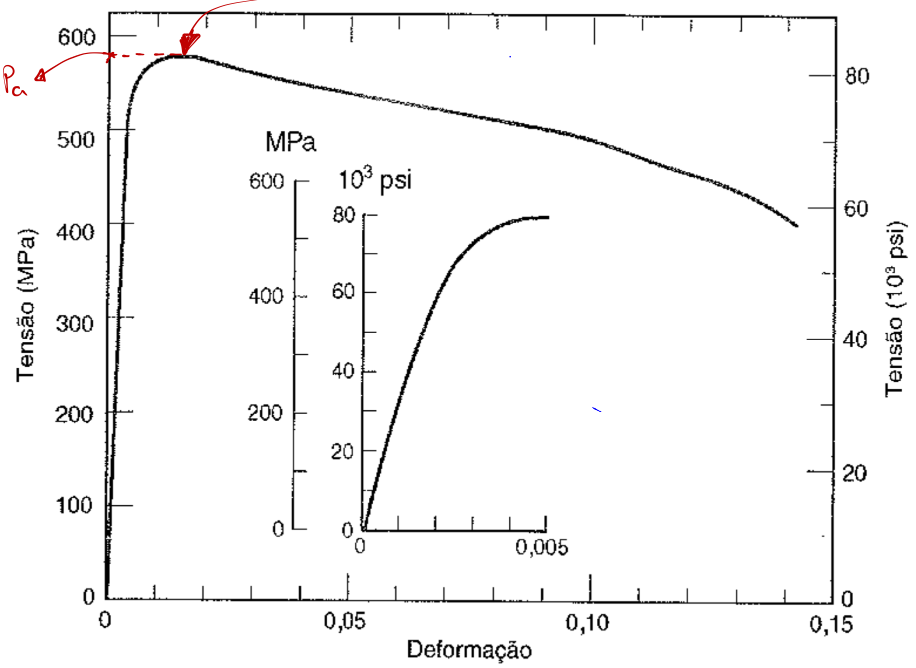


Fig. 6.21 Comportamento tensão-deformação em tração para um aço carbono simples.

6.26 Um corpo de prova cilíndrico feito a partir de uma liga de latão e que possui um comprimento de 60 mm (2,36 pol.) deve se alongar em somente 10,8 mm (0,425 pol.) quando uma carga de tração de 50.000 N (11.240 lb_f) é aplicada. Sob essas circunstâncias, qual deve ser o raio do corpo de prova? Suponha que essa liga de latão apresenta o comportamento tensão-deformação mostrado na Fig. 6.12.

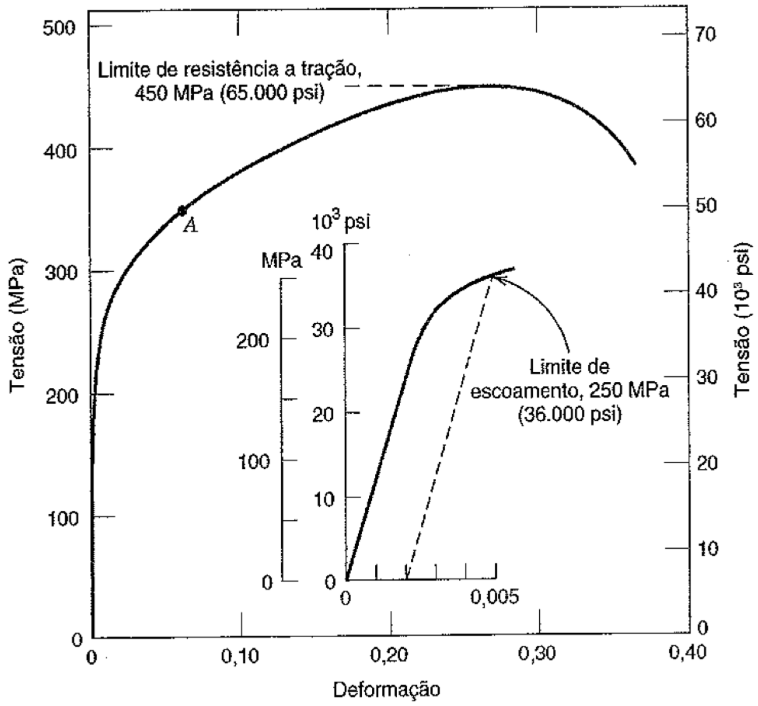


Fig. 6.12 O comportamento tensão-deformação para o corpo de prova de latão discutido no Problema-Exemplo 6.3.

Dados: $l_0 = 60\,mm$
$(l - l_0) = 10{,}8\ mm$
$F = 50000\,N$
$r_0 = ?$

* Mais os dados que puderem ser retirados do gráfico acima. *

Solução: Precisamos de uma relação que envolva r_0 mais o que foi dado.

Dos dados me parece que $\sigma = \dfrac{F}{\pi r_0^2}$ deverá ser a equação utilizada

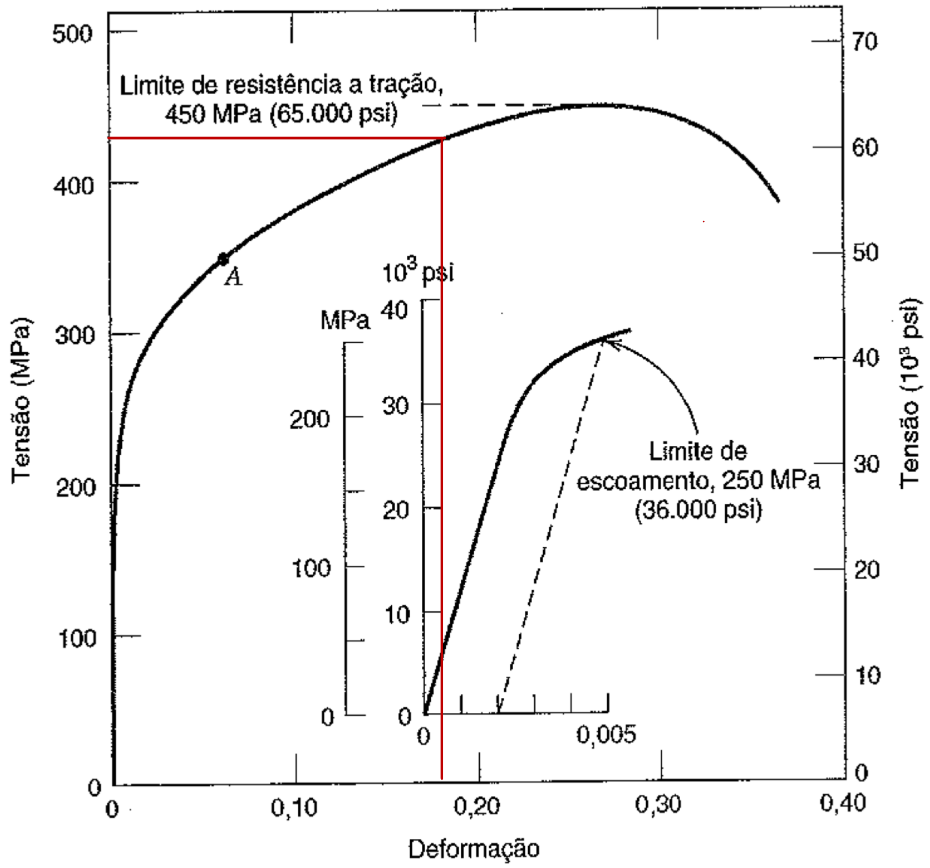
$$\Longrightarrow\ r_0 = \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma}}$$

Precisamos de σ.

Foi dado $\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0}$ "dados"

$$\varepsilon_z = \frac{10,8}{60} = 0,18$$

Do gráfico podemos encontrar a tensão σ para esta deformação



$\sigma = 425\,MPa$

$$r_0 = \sqrt{\frac{50000}{\pi \times 425 \times 10^6}}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{50000}{\pi \times 425}} \times 10^{-3}\ m$$

$$\boxed{r_0 = 6,1\ mm}$$

6.31 Um corpo de prova metálico de formato cilíndrico, com diâmetro original de 12,8 mm (0,505 pol.) e comprimento útil de 50,80 mm (2,000 pol.) é puxado em tração até a ocorrência de fratura. O diâmetro no ponto de fratura é de 6,60 mm (0,260 pol.) e o comprimento útil na fratura é de 72,14 mm (2,840 pol.). Calcule a ductilidade em termos da redução percentual na área e do alongamento percentual.

Ductilidade: Da uma "ideia" da capacidade que um material tem para deformar sem "quebrar".

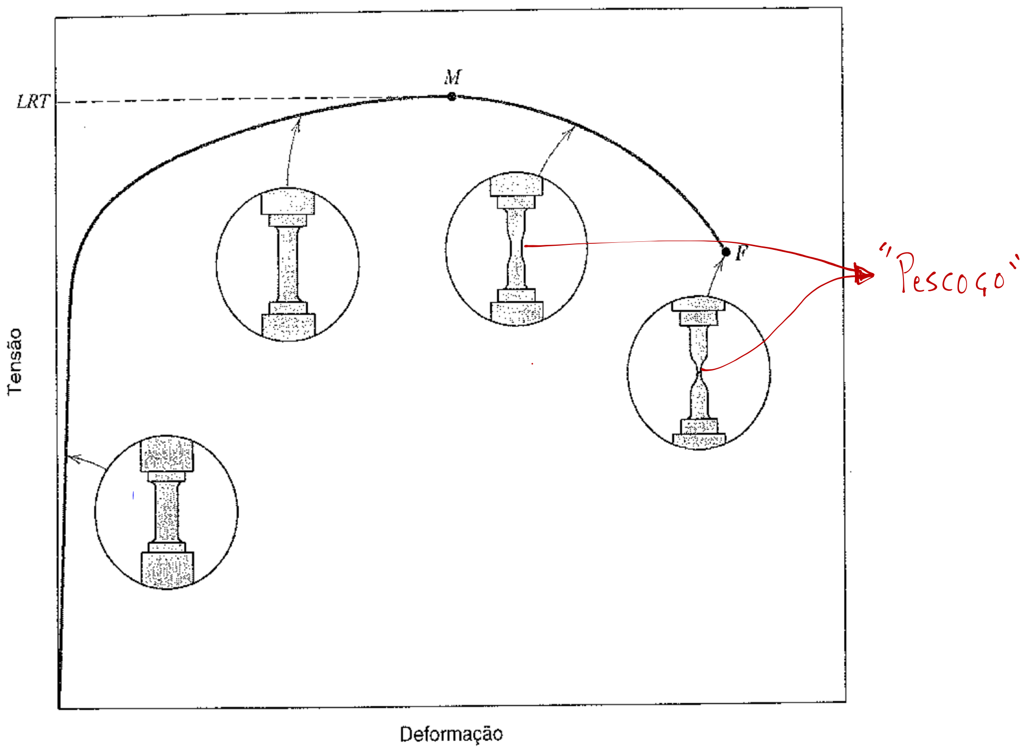
Pode ser calculado de duas formas:

1) Percentual de elongamento até a fratura

$$Al\% = \left(\frac{l_f - l_0}{l_0}\right) \times 100 \; ; \; l_f = \text{Comprimento na fratura.}$$

2) Percentual de redução na area transversal na regia de formação do pescoço

$$RA\% = \left(\frac{A_0 - A_f}{A_0}\right) \times 100$$



Solução: Dados:

$d_0 = 12,8\ mm$
$l_0 = 50,80\ mm$
$d_f = 6,60\ mm$
$l_f = 72,14\ mm$

$$Al\ \% = \left(\frac{l_f - l_0}{l_0}\right) \times 100 = \left(\frac{72,14 - 50,80}{50,80}\right) \times 100$$

$$\boxed{Al\ \% = 42\ \%}$$

—//—

$$RA\ \% = \left(\frac{A_0 - A_f}{A_0}\right) \times 100 = \left(\frac{\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{d_f}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^2}\right) \times 100$$

$$RA\ \% = \left(\frac{d_0^2 - d_f^2}{d_0^2}\right) \times 100$$

$$\boxed{RA\ \% \simeq 73\ \%}$$

6.32 Calcule os módulos de resiliência para os materiais que possuem os comportamentos tensão-deformação mostrados nas Figs. 6.12 e 6.21.

Resiliência ≡ Capacidade de absorver energia durante a deformação, voltando ao seu estado inicial, ou seja, devolvendo a energia absorvida.
É definida como a quantidade de energia absorvida no regime elástico, ou seja, até o inícios da deformação plástica.

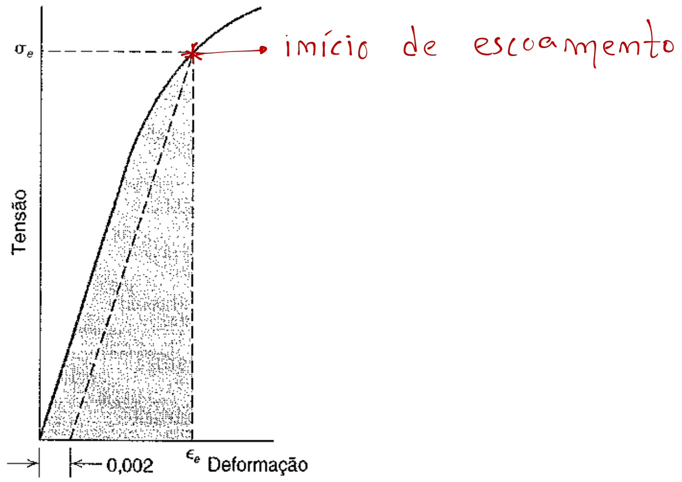


Fig. 6.15 Representação esquemática mostrando como o módulo de resiliência (que corresponde à área sombreada) é determinado a partir do comportamento tensão-deformação em tração de um material.

$$U_{res.} \equiv \int_0^{\varepsilon_r} \sigma \, d\varepsilon \; ;$$

note que $[\sigma \, d\varepsilon]$ = Energia por unidade de volume

$\frac{N}{m^2} \cdot (\text{admensional})$

Energia = N.m

$$\rightarrow [\sigma \, d\varepsilon] = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{N \cdot m}{m^3}$$

Solução:

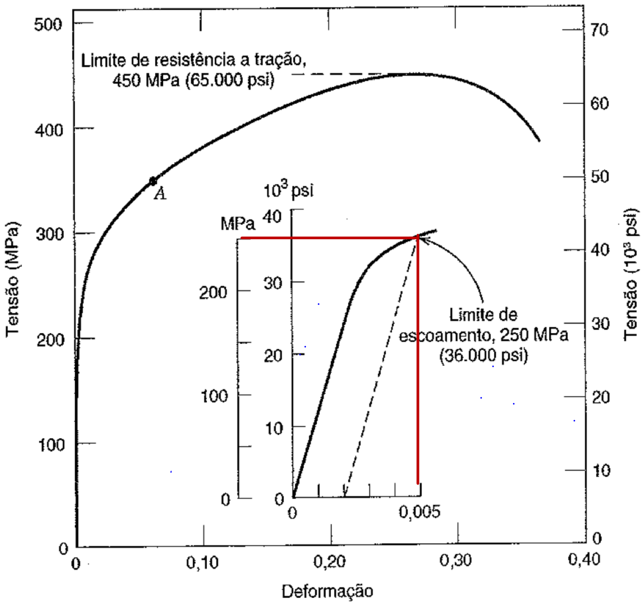


Fig. 6.12 O comportamento tensão-deformação para o corpo de prova de latão discutido no Problema-Exemplo 6.3.

$$U_r = \int_0^{0,005} \sigma \, d\varepsilon$$

Em geral, a forma exata da função $\sigma(\varepsilon)$ não é conhecida. Assume-se uma relação linear entre σ e ε. O valor de uma integral pode ser obtida substituindo-se o integrando desconhecido por seu valor médio, caso seja conhecido. O valor médio de uma função linear é sempre a metade de seu valor máximo.

Ex: se $y(x) = ax + b$

$\Rightarrow \langle y(x) \rangle$ = média de $y(x)$

$$\langle y(x) \rangle = \frac{\int_0^{X_{máx}} (ax+b)\,dx}{X_{máx}}$$ "Cálculo de média"

$$\langle y(x) \rangle = \frac{\left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_0^{X_{máx}}}{X_{máx}} = \frac{\frac{aX_{máx}^2}{2} + bX_{máx}}{X_{máx}}$$

$$\langle y(x) \rangle = \frac{aX_{máx}}{2} + b$$

Se $y(0) = 0$ (nosso caso) $\Longrightarrow b = 0$

$$\langle y(x)\rangle = \frac{a X_{máx}^2}{2} = \frac{Y_{máx}}{2}$$

Portanto $\langle \sigma \rangle = \frac{\sigma_e}{2}$ σ_e = tensão no escoamento.

$$U_r = \int_0^{\varepsilon_e} \frac{\sigma}{2} d\varepsilon' = \frac{\sigma_e}{2} \cdot \int_0^{\varepsilon_r} d\varepsilon' = \frac{\sigma_e}{2} \left[\varepsilon'\right]_0^{\varepsilon_e}$$

$$\boxed{U_r = \frac{\sigma_e}{2} \varepsilon_e} \quad (1)$$

Significa: Para calcularmos a Resiliência, basta sabermos a tensão e a deformação de escoamento (σ_r e ε_r).

Alternativamente, usando a relação

$$\sigma = E\varepsilon \Longrightarrow \sigma_e = E\varepsilon_e \Longrightarrow \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$$

$$\boxed{U_r = \frac{\sigma_e^2}{2E}} \; ; \quad (2)$$

ou

$$\boxed{U_r = \frac{E\varepsilon_e^2}{2}} \; . \quad (3)$$

Solução: Para a figura 6,12 $\rightarrow$ $\varepsilon_e = 0{,}005$ e $\sigma_e = 250$ MPa

Em (1) $U_r = \frac{0{,}005 \times 250}{2} \times 10^6 \; J/m^3$

$U_r = 625000 \; J/m^3$ $\boxed{U_r \simeq 6{,}3 \times 10^5 \; J/m^3}$

Usando a equação (2) $\Rightarrow$ Calcular E da inclinação da curva

$\Rightarrow$ $E \simeq 90\ GPa$

$$\boxed{U_r = \frac{\sigma_e^2}{2.E} \simeq \frac{250^2}{2 \times 90} \times \frac{10^{12}}{10^9} \simeq 350 \times 10^3 \simeq 3{,}5 \times 10^5\ J/m^3}$$

Usando a equação (3)

$$\boxed{U_r = \frac{E\varepsilon_e^2}{2} \simeq \frac{90 \times 0{,}005^2}{2} \times 10^9 \simeq 1{,}1 \times 10^6\ J/m^3}$$

Obs: As tres formas para cálculo da mesma grandeza deu valores diferentes. As equações que utilizam E deram valores menores. Por quê?

A forma como os dados são retirados do gráfico segue definições aproximadas. A linha pontilhada a partir de $\varepsilon = 0{,}002$ é uma definição que permite obtenção de valores que representam características que podem ser comparadas com outros materiais. Não devemos comparar as equações para um único material. Devemos é comparar diferentes materiais através de procedimentos (cálculos) idênticos.

Vamos verificar as três equações aplicadas a outro material. Queremos comparar os materiais; saber qual é mais ou menos resiliente

Para a Figura 6,21.

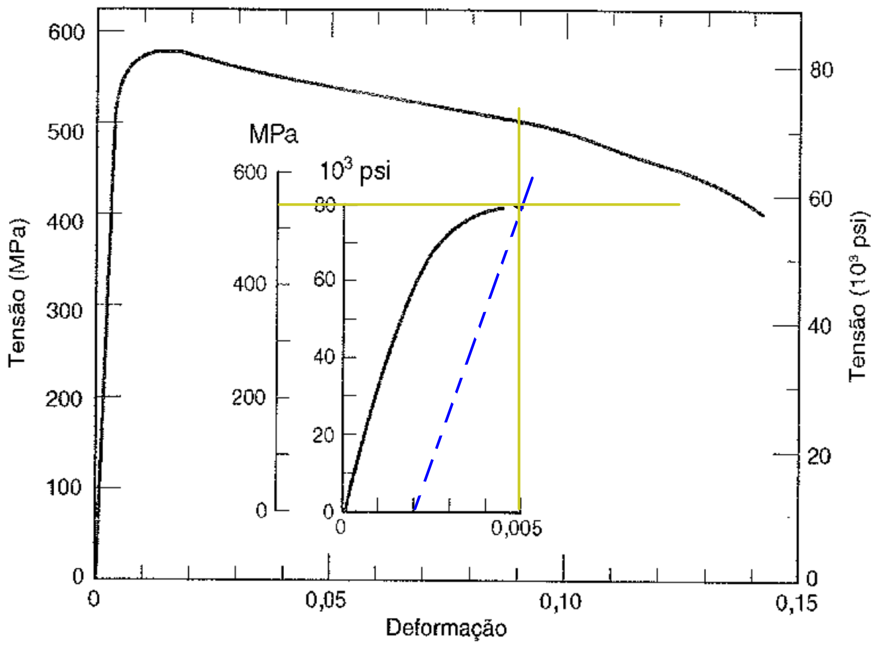


Fig. 6.21 Comportamento tensão-deformação em tração para um aço carbono simples.

Equação (1)

$\sigma_r \simeq 530\ MPa$ e $\varepsilon_r \simeq 0{,}005$

$$U_r = \frac{0{,}005 \times 530}{2} \times 10^6\ J/m^3$$

$U_r = 1325000\ J/m^3$ $\boxed{U_r \simeq 1{,}3 \times 10^6\ J/m^3}$

Equação (2).

$U_r = \dfrac{\sigma_e^2}{2E}$ Pelo gráfico $E \simeq \dfrac{530\ MPa}{0{,}003} \approx 177\ GPa$

$$\boxed{U_r \simeq \frac{530^2}{2 \times 177} \times \frac{10^{12}}{10^9} \simeq 794 \times 10^3\ J/m^3 \simeq 0{,}7 \times 10^6\ J/m^3}$$

Equação (3)

$$\boxed{U_r = \frac{1}{2} E \varepsilon_e^2 \simeq \frac{1}{2} 177 \times 0{,}005^2 \times 10^9 \simeq 2{,}2 \times 10^6}$$

Note que os valore obtidos para o carbono foram aproximadamente o dobro do latão. Devem ser comparadas as equações similares. O importante é a conclusão final:

O carbono tem ~ o dobro da resiliência do carbono simples.

Obs: Cálculos de tenacidade são similares; deve-se apenas utilizar $\varepsilon_{fratura}$ no limite de integração.

Problemas - faça você mesmo(a).

6.34 Uma liga de latão que se pretende utilizar para mola em uma aplicação deve possuir um módulo de resiliência de pelo menos 0,75 MPa (110 psi). Qual deve ser o seu limite de elasticidade mínimo?

6.36 Mostre que as Eqs. 6.18a e 6.18b são válidas quando não existe uma alteração no volume durante a deformação.