Prática I

GRANDEZAS FÍSICAS E TEORIA DOS ERROS

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do homem deve-se ao fato de que ele procurou observar os acontecimentos ao seu redor. Ao ver os resultados dos diversos eventos, ele procurou estudá-los para descobrir as causas pelas quais estes acontecem.

MEDIÇÕES

Foi na fase do estudo que surgiu o problema da avaliação, ou seja, da medição da intensidade de uma série de fatos e grandezas, que faziam parte do fenômeno em questão.

Para medir, foi necessário ao homem recorrer a um critério comparativo, a um critério de relatividade. Desta forma, as medidas nunca serão absolutas, e sim relativas. As medidas são então avaliadas em relação a uma medida fundamental, arbitrariamente escolhida e que geralmente é chamada de UNIDADE.

Qualquer grandeza escalar **G**, ao ser medida, terá como resultado um produto de: um número **M**, que representa o resultado da comparação, e outro fator ***u*** que representa a unidade adotada. Em outras palavras, uma grandeza escalar é o produto de um número por uma unidade, ou seja:

$$\mathbf{G = M \cdot \mathit{u}} \qquad (1)$$

É importante observar que, embora a grandeza permaneça inalterada a quantidade de unidades em uma medida varia com a unidade adotada. No caso onde a grandeza é o comprimento de um objeto, pode-se dizer que o comprimento é sempre o mesmo, o que nos permite concluir que:

$$G = M_1\, u_1 = M_2\, u_2 = M_3\, u_3 = \ldots$$

onde u_1, u_2, u_3,... são diferentes unidades e portanto M_1, M_2, M_3,… serão números diferentes.

VALOR MEDIDO

Toda grandeza física possui um valor que chamamos de VALOR VERDADEIRO. Quando fazemos uma medida, estamos usando instrumentos e procedimentos que introduzem erros na medida e impossibilitam a obtenção do valor verdadeiro. O que medimos então é um VALOR MAIS PROVÁVEL, o qual está provido de uma INCERTEZA, devido a uma série de fatores que veremos mais adiante.

Assim, pode-se dizer que a grandeza G será dada por:

$$\mathbf{G = (A \pm \Delta A) \cdot \mathit{u}} \qquad (2)$$

onde: $\mathbf{A \pm \Delta A = M}$ é a medida;
A é o valor mais provável e
$\mathbf{\Delta A}$ é o número que representa a incerteza, comumente chamado de DESVIO.

NATUREZA DO OBJETO E A MEDIDA

Uma medida só tem sentido nos limites de precisão dentro dos quais a grandeza a ser medida é definida. O comprimento de um bloco de madeira com extremidades rugosas só pode ser definido com aproximação de cerca de um milímetro. O comprimento de uma boa régua metálica, cujas extremidades são de cantos e faces polidas, pode, ao contrário, ser definido com uma aproximação que atinge o micron.

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Os instrumentos (ou dispositivos) de medida, quanto aos usos, se caracterizam pelas qualidades do PODER RESOLUTIVO ou RESOLUÇÃO, FIDELIDADE e PRECISÃO.

A RESOLUÇÃO de um instrumento é maior quanto menores forem as variações da grandeza a ser medida e que podem ser indicadas pelo instrumento.

Na reiteração de medidas da mesma grandeza, repetidas sempre com o mesmo instrumento, quanto mais os resultados se apresentem concordantes (pouco dispersos), mais FIEL é o instrumento.

Um instrumento é mais PRECISO ou JUSTO quanto mais próximos do "valor verdadeiro" forem os resultados fornecidos por ele.

Esta última definição pode parecer conter uma inconsistência, uma vez que a obtenção do "valor verdadeiro" é justamente o objetivo da medida. Deve-se entender aqui a expressão "valor verdadeiro" como sendo um valor previamente conhecido. Isto porque, ou foi obtido utilizando outro método de medida através de trabalho prévio, ou se está procedendo a uma comparação com um padrão.

MÉTODO DE MEDIDA

Em cada caso concreto, a escolha do método de medida é de capital importância. Nessa escolha deve ser levada em conta a sensibilidade dos dispositivos de medidas, tendo-se presente os limites de precisão em que a grandeza em questão está definida. Assim, a espessura de uma lâmina de vidro plana de boa qualidade poderá ser medida de forma mais eficiente através de um método que utiliza a interferência luminosa do que diretamente com um paquímetro.

HABILIDADE DO OPERADOR

Evidentemente, é grande a influência da habilidade do operador na qualidade da medida. Mesmo quando a medida se resume a efetuar apenas uma leitura de escala, há precauções a serem tomadas como, por exemplo, para evitar o ERRO DE PARALAXE que significa o deslocamento aparente de um objeto, quando se muda o ponto de observação. Para minimizar este tipo de erro, quando se observa um índice que não está situado exatamente no plano de graduação (tais como termômetros e instrumentos de escala com ponteiros), deve-se então observar na direção vertical (normal) à escala.

No caso de uma escala crescente da esquerda para a direita, se a observação é oblíqua, com o observador à direita em relação ao ponteiro, sua leitura dará um valor maior que o esperado. Se o observador estiver à esquerda, a leitura será errada, pois o valor será menor que o aferido pelo instrumento.

ERROS

Devemos reiterar nossa atenção para o fato de que não existem e nem poderiam existir instrumentos que nos permitissem medir sem erro algum uma grandeza física.

Nessas condições, com as restrições que cada caso exige, necessitamos do conceito de valor verdadeiro de uma grandeza, ao menos, como hipótese de trabalho. O que importa é destacar que média de uma grandeza física difere sempre de algo do valor verdadeiro da mesma.

Dar simplesmente um número como medida de uma grandeza, sem aquilatar o erro de que está afetado, seja aproximadamente ou em termos de probabilidade, não significa muito.

Uma medida tem sentido, somente quando se pode determinar de uma forma ou de outra o erro de uma medição.

Classificação dos Erros

***1. Erros Grosseiros**.*

São aqueles provenientes de falhas do experimentador, podendo ser eliminados por medidas mais cuidadosas. Por exemplo: engano na leitura de um componente na leitura de um instrumento qualquer.

2. Erros Sistemáticos.

São aqueles que resultam de causas constantes que alteram de modo uniforme os resultados das medidas. Geralmente podem ser corrigidos, através das equações ou tabelas que se colocam no instrumento para saber de quanto é o erro. Se tais erros se devem ao aparelho de medida, são ditos ***instrumentais***.

Exemplo: uma trena de aço que se encolheu. Ao invés de um comprimento de um metro, possui apenas 98 cm. Isso irá acarretar um erro sistemático na medida de um outro comprimento.

Se os erros sistemáticos se devem à falhas do experimentador, eles são ditos ***pessoais***. Os erros pessoais são devidos à maneira peculiar de lidar com o instrumento, diferença de avaliações de frações de divisão, etc.

3. Erros Acidentais ou Fortuitos.

São aqueles que resultam de causas indeterminadas, que alteram de forma variável os resultados das medidas. Não podem ser eliminados e decorrem de variações de pressão atmosférica, tremores, poeiras, oscilações da temperatura, unidade, etc.

DEFINIÇÕES

Daremos agora algumas definições que são de grande importância:

1. Valor Médio ou Valor Mais Provável.

O valor médio $(\overline{x})$ *ou valor mais provável* de uma série de *n* medidas é a média aritmética dessas medidas. Logo:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \qquad (3)$$

onde x_1, x_2, x_3, . . ., x_n são os valores encontrados nas *n* medidas. $\overline{x}$ representa a melhor estimativa que podemos efetuar de grandeza que estamos avaliando.

2. Desvios

Desvio Absoluto (Δx_i) da i-ésima medida, é a diferença entre o valor x_i obtido nessa medição e o valor médio $\overline{x}$ das diversas medidas efetuadas.

Portanto:

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x} \qquad (4)$$

Desvio Relativo $D_r(x)$ de uma medida é a razão entre o módulo do desvio absoluto pelo valor médio.

$$D_r(x) = \frac{|\,\Delta x\,|}{\overline{x}} \qquad (5)$$

Se o desvio relativo for expresso em porcentagem será chamado **Desvio Percentual**. Representando o desvio percentual de medida x por $D_p(x)$ teremos:

$$D_p(x) = \frac{(100\,.\,|\,\Delta x\,|)}{\overline{x}}\,\% \qquad (6)$$

Desvio Médio (Δx) de uma série de medidas é a média aritmética dos módulos dos desvios absolutos.

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_n}{n} \qquad (7)$$

Tomemos como exemplo a tabela de valores abaixo. Calcule o valor médio e o desvio médio das medidas.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	100,2	100,4	100,3	100,2	100,5	100,3	100,1	100,4	100,2	100,3

Solução:
Para calcularmos o desvio médio devemos calcular primeiramente o desvio absoluto de cada medida, que podem ser vistos na tabela abaixo:

n	x_i	Δx_i	$\lvert\Delta x_i\rvert$
1	100,2	-0,09	0,09
2	100,4	0,11	0,11
3	100,3	0,01	0,01
4	100,2	-0,09	0,09
5	100,5	0,21	0,21
6	100,3	0,01	0,01
7	100,1	-0,19	0,19
8	100,4	0,11	0,11
9	100,2	-0,09	0,09
10	100,3	0,01	0,01
	Σxi=100,29		$\Sigma\lvert\Delta x_i\rvert$ = 0,92

Portanto:

$$\bar{x} = \frac{1002{,}9}{10} = 100{,}29 \qquad \Delta x = \frac{0{,}92}{10} = 0{,}092$$

Logo o valor médio $\bar{x}$ = 100,29 e desvio médio Δx = 0,09
OBS.: A razão para o desvio médio se indicado como Δx = 0,09 será exposta mais adiante.

Desvio avaliado do instrumento consiste em admitir, como regra geral, que o erro introduzido pelo instrumento na leitura é, no mínimo, metade do menor intervalo de escala deste valor. No entanto, a regra de se usar metade da menor divisão do instrumento como o desvio da medida não é absoluta, não podendo ser aplicada indistintamente a todos os casos.

Para as escalas providas de nônio (explicação adiante) é conveniente tomar como desvio avaliado a precisão do nônio.

Sempre que se fizer uma só medida de uma grandeza, deve-se acrescentar à medida o desvio avaliado do instrumento utilizado.

PRECISÃO DE MEDIDAS

1. Algarismos Significativos

Uma medida será tanto mais exata, quanto mais próximo o valor encontrado estiver do valor real.

A precisão está relacionada com os erros acidentais e a exatidão está ligada, sobretudo aos erros sistemáticos. Se tivermos um processo de medida sem erros sistemáticos, então os dois conceitos se identificariam isto é, a medida exata seria também a mais precisa.

Porém, ao medirmos uma grandeza com um instrumento de medida qualquer, o valor dessa medida nos será dado pelos algarismos efetivamente gravados na escala do aparelho e, quando possível, por mais um algarismo avaliado a critério do operador, das frações não gravadas.

Suponhamos que uma pessoa não muito experiente tenha realizado uma série de medidas de comprimento e obtido o seguinte resultado:

Comprimento médio = 925,47 mm
Desvio médio = 3 mm

Os algarismos 9 e 2 do valor médio, são exatos, mas o 5 é duvidoso, uma vez que o desvio médio absoluto é 3mm. O 4 e o 7 não têm significado algum, no valor médio acima.

Os algarismos corretos e o primeiro algarismo duvidoso são chamados ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS da medida. No valor médio acima, os algarismos 9, 2 e 5 são significativos. Como o próprio nome indica, eles possuem um significado, fornecem uma informação importante a respeito do valor da grandeza considerada.

Dependendo das unidades utilizadas as grandezas físicas podem ser expressas com zeros à direita ou à esquerda dos algarismos significativos sem serem considerados como tal.

Por exemplo, uma medida de comprimento de L=25,3m possui três algarismos significativos assim como quando transformada para outras unidades como quilômetros (L=0,0253km) ou milímetros (L=25300mm). Zeros à direita podem ser de fato algarismos significativos resultantes de uma medida e não de uma transformação de unidades. Para evitar confusões é indicado o uso de potências de 10 (notação cientifica) ficando então melhores expressos como $L=25,3.10^{-3}$km e $L=25,3.10^{3}$mm os exemplos acima, onde fica evidente a quantidade de algarismos significativos. Via de regra, quando expressos os zeros à direita são considerados algarismos significativos.

Observações. O desvio médio é utilizado como indicativo de incerteza, portanto somente um algarismo significativo é usado. Os desvios médios são obtidos geralmente por cálculo. Podem-se usar dois algarismos significativos para efeito de aproximação.

Com respeito às aproximações a serem realizadas no laboratório tem-se as seguintes regras:

1. Quando o segundo algarismo significativo do desvio médio é menor que 5, a aproximação é feita abandonando-se este algarismo.
   Ex.: $\Delta x = 0,042 \rightarrow \Delta x = 0,04$.
2. Quando o segundo algarismo significativo do desvio médio é maior ou igual a que 5, a aproximação é feita somando-se ao segundo algarismo significativo no número de unidades faltante para dez.
   Ex. $\Delta x = 0,0037 \rightarrow \Delta x = 0,004$

2. Operações com Grandezas Físicas.

Muitas grandezas físicas não podem ser medidas diretamente, mas são obtidas por meio de operações com outras medidas.

A seguir é apresentada uma lista de operações com sua respectiva propagação de erros.

Adição: $V \pm \Delta V = (x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y) \quad = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$

Subtração: $V \pm \Delta V = (x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y) \quad = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y)$

Multiplicação: $V \pm \Delta V = (x \pm \Delta x) . (y \pm \Delta y) \quad = (x . y) \pm (x . \Delta y + y . \Delta x)$

Multiplicação por uma constante:

$V \pm \Delta V = c . (x \pm \Delta x) \quad = (c . x) \pm (c . \Delta x)$

Potência: $V \pm \Delta V = (x \pm \Delta x)^n \quad = (x^n) \pm (n . x^{n-1} . \Delta x)$

Divisão: $V \pm \Delta V = (x \pm \Delta x) / (y \pm \Delta y) \quad = (x/y) \pm (1/y^2.(x.\Delta y+y.\Delta x))$

Exponencial: $V \pm \Delta V = c^{(x \pm \Delta x)} \quad = (c^x) \pm (c^x . \ln(c) . \Delta x)$

Ainda com relação às operações matemáticas devemos considerar o número de algarismos significativos dos resultados das operações, de acordo com as seguintes regras:

Soma e Subtração: O resultado deve apresentar a mesma precisão da parcela de menor precisão. As parcelas devem ser aproximadas para esta precisão previamente à operação.

Por exemplo, para somarmos os números S = 253,637 + 0,0756 + 5,2 devemos aproximar todas as parcelas para uma casa decimal pois 5,2 é a parcela de menor precisão. Temos então S = 253,6 + 0,1 + 5,2 = 258,9.

Multiplicação e Divisão: O resultado deve ser aproximado para o mesmo número de algarismos significativos do fator de menor número de algarismos significativos.

Assim, quando fizermos a multiplicação P = 3,1416 . 6,9 temos como resultado P=22, resultado da aproximação de 21,67704 para o número de algarismos significativos do fator 6,9, ou seja, dois.

Logaritmos: O resultado deve ter o número de casas decimais igual ao número de algarismos significativos do logaritmando. Assim, Log(3)=0,5 e Log(3,0)=0,47.

Faça pesquisas na Internet usando como palavras de busca: "teoria de erros", "erros e medidas" e "algarismos significativos" e encontrará diversas páginas para complementar seus conhecimentos sobre estes tópicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. SPIEGEL, M.R. Estatística, Editora McGrawHill do Brasil LTDA, 1972.
2. DORIA FILHO, U. Introdução à Bioestatística, Negócio Editora, 1999.
3. SILVA, E.M. & SILVA, E.M. Matemática e Estatística Aplicada, Editora Atlas S.A., 1999.
4. AXT, R. & GUIMARÃES, V.H. Física Experimental I e III. Porto Alegre, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1981, 91p.
5. HENNIES, C.E. et alli. Problemas Experimentais em Física. Campinas, Editora da UNICAMP, 1986, v. 1, 221p.
6. MAIA, L.P.M. Introdução à Física. Rio de Janeiro. Nacionalista, 1961, 143p.
7. MARTINS, N. et. alli. Física para a Universidade: análise dimensional. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1979, v.1, 133p.
8. MORENO, M.O. Iniciação à Análise de Dados Experimentais. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1986, 97p.
9. NUSSENZVEIG, H.M. Curso de Física Básica: Mecânica, vol. 1, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 1981.
10. REGO, G.B. e Cunha, W.A. Mecânica, vol. 1, São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1959.
11. SQUIRES, G.L. Practical Physics. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
12. TIMONER, A.; MAJORANA, F.S. e HAZOFF, W. Manual de Laboratório de Física: Mecânica, Calor e Acústica, São Paulo, Edgard Blücher Ltda., 1973.
13. Manual de Laboratório de Física Experimental I, Faculdade de Física, Universidade Federal de Uberlândia.

EXERCÍCIOS

2) Calcular a área de uma placa em forma de trapézio, sabendo-se que as medidas obtidas foram: B (base maior)= 12,06 cm, com desvio= 0,03 cm; b (base menor)= 4,53 cm, com desvio= 0,06 cm;h (altura) = 5,72, com desvio de 0,08 cm.

$$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$$

3) Numa série de 10 medidas do comprimento de uma mesa foram obtidos os seguintes valores em centímetros: 100,2; 100,4; 100,3; 100,2; 100,5; 100,3; 100,1; 100,5; 100,2; 100,3. Calcule o valor médio do comprimento, seu desvio médio e o escreva sob a forma correta.

4) Na tabela a seguir encontram-se registradas as medidas de comprimento, largura e espessura de uma folha de papel. Calcule o valor médio, o desvio médio e escreva-os sob a forma correta (valores em cm).

largura:	20,2	20,1	20,3	20,4	20,1	20,2	20,3	20,3	20,3	20,2
comprimento:	30,5	30,4	30,6	30,4	30,5	30,6	30,4	30,5	30,3	30,3
espessura:	0,31	0,043	0,31	0,32	0,31					

Após calcular os valores médios acima, use-os para calcular a área da face da folha e a escreva corretamente. Calcule o volume da folha a partir da área calculada anteriormente. Escreva o volume sob a forma correta. Calcule novamente o volume diretamente, isto é, multiplicando (largura, comprimento e espessura) e a escreva corretamente.
Compare os dois volumes obtidos.

5) Na determinação do volume de um cilindro metálico, obtiveram-se os seguintes valores para o diâmetro e para sua altura (valores em mm):

diâmetro:	30,65	30,67	30,40	30,70	30,68	30,45	30,50	30,60	30,65	30,72
altura:	92,4	92,5	92,4	92,5	92,5	92,4	92,6	92,3	92,4	92,5

a) Calcule o valor médio do volume;
b) Calcule o desvio médio do volume;
c) Escreva o volume sob a forma correta.

6) Mediu-se um paralelepípedo metálico com uma escala graduada em milímetros e encontraram-se os seguintes valores:

Comprimento	202,54
Largura	113,32
Espessura	23,41

a) Escreva os valores acima sob a forma correta;
b) Calcule o volume e o escreva sob a forma correta.

7) A massa de um bloco de forma cúbica de aresta aproximadamente igual a 2cm, é (30,133 ± 0,4)g. Com que precisão deve ser determinada a aresta do cubo para que a densidade da substância, possa ser calculada com desvio percentual inferior a 3%?