Relatividade

Prof. Paulo Sérgio Moscon

Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Maio 23, 2010

Resumo

blá

1 Introdução

Entre os estudantes, e a população em geral, o título (já famoso) “teoria da relatividade” é sinônimo de dificuldade extrema (analogamente ao termo “física quântica”). Como exemplo, é comum se ouvir um marido dizendo para a esposa: “você é mais complicada do que a teoria da relatividade (ou que a física quântica)”. Na verdade tudo o que é novo apresenta sim um grau a mais de dificuldade; contudo, no caso particular da teoria da relatividade especial de Einstein, esta não apresenta grandes dificuldades técnicas (ferramental matemático necessário), tal que qualquer aluno com conhecimento de física e matemática em nível médio está apto ao seu estudo. Assim, esta diciplina poderia ser ministrada no primeiro semestre de um curso de graduação. Os pré-requisitos necessários são mínimos: Além de um conhecimento básico em física e matemática, é exigido que aceite-se dois pequenos postulados nos quais toda a teoria se baseia. Notadamente a “grande” dificuldade encontrada está exatamente em aceitar como verdadeiros estes dois postulados, pois estes fogem ao senso comum. São eles:

Postulado 1 - Postulado relativístico - As leis da física são as mesmas para observadores em diferentes referenciais inerciais.

Postulado 2 - Postulado da velocidade da luz - A frente de onda associada a um único pulso luminoso assume mesma velocidade *c* relativa a qualquer referencial inercial.

? - O que é um referencial inercial e porque este é importante para física?

Em um referencial inercial, qualquer aceleração observada está necessariamente associada a uma força real. Sendo assim, um referencial inercial não pode estar acelerado. Exemplo: Se cientistas vivessem (toda suas vidas) dentro de uma grande caixa fechada, e esta caixa fosse acelerada por uma força externa, então os pesquisadores sentiriam e observariam, em seu "mundo" (sua natureza), forças e acelerações ocorrendo sem a necessidade de uma ação; uma bolinha de gude colocada sobre uma mesa mudaria seu estado de movimento sem a necessidade de entrar em contato com outro corpo dentro do sistema.

Claro que se nosso mundo fosse uma caixa fechada como esta (e talvez seja), a física seria desenvolvida de qualquer forma, pois os estudos seriam realizados e conclusões seriam alcançadas. Provavelmente neste mundo não inercial as leis da física assumiriam uma forma mais complexa pois o estado de movimento de um corpo contaria com uma variação intrínseca. Felizmente, em nosso mundo

(nossa caixa), ao excluírmos todas as forças observadas dentro de nossa caixa, a bolinha de gude fica em repouso ou mantem sua velocidade constante em relação às paredes da caixa, não mudando seu estado de movimento. As leis da física ficam muito mais simples desta forma.

Como as leis físicas assumem formas diferentes dependendo se o referencial é ou não inercial, então temos que optar por trabalharmos com as leis encontradas em um ou em outro tipo de sistema. Qual você escolheria? Obviamente existe uma tendência natural de evitarmos maiores complicações;

sendo assim os cientistas optaram por trabalhar com as leis físicas definidas a partir das caixas não submetidas a forças externas (ou, equivalentemente, acelerações sem a necessidade de ação), ou seja, os referenciais inerciais.

Além do fato colocado acima, que as leis físicas assumem maior simplicidade nos referenciais inerciais, existe um outro aspecto que merece atenção. Uma outra pergunta a ser respondida:

? Dentre todos os referenciais inerciais possíveis, existe algum especial? que apresenta algum diferencial em relação aos demais?

A pergunta acima é naturalmente justificada, pois se dentre todos os referenciais inerciais existir um (ou mais de um) diferenciado(s) em relação aos demais, então estaríamos novamente com aquela pergunta – Qual referencial escolho para estudar a natureza?

Para a teoria da relatividade especial (e também para o eletromagnetismo) todos os referenciais inerciais são absolutamente equivalentes e as leis físicas independem de qual referencial inercial escolhemos para trabalhar. Contudo, no início do século XX esta questão não era tão clara.

Breve histórico sobre a existência de um referencial inercial especial

Porque do postulado 1 ($\equiv$ **P1**)?

Sabemos que uma onda sonora se propaga através de um meio específico, a atmosfera (ou qualquer meio composto por partículas suficientemente próximas). Sendo assim, o referencial que está em repouso relativamente ao sistema de partículas responsável por transmitir a onda de pressão sonora, possui um diferencial em relação aos demais. A velocidade da onda sonora, na atmosfera, é de ≈ 300m/s no referencial em repouso relativamente à atmosfera. Para os demais referenciais (estamos considerando referenciais inerciais) esta velocidade deve ser adicionada à velocidade do sistema em questão. Algo semelhante éra esperado para a onda de luz; esperava-se que esta se propagava através de um meio até então não detectado. Este meio foi chamado de eter, e grande parte da comunidade científica acreditava que sua detecção seria questão de tempo devido às melhorias tecnológicas.

Note que se a existência deste eter fosse comprovada, e sabendo que a luz se propaga através do vácuo, então nosso universo (nossa caixa) estaria empregnada com o tal éter e este definiria entre todos os referenciais inerciais, um especial, o que tivesse velocidade nula em relação ao eter, tal como no caso da onda sonora, mas sobre um ponto de vista mais amplo, todo o universo conhecido. Experimentos que objetivavam a detecção deste eter foram realizados no final do século XIX (link - MEDINDO A VELOCIDADE DA LUZ). O experimento de Albert Michelson e Edward Moreley foi realizado em 1887 (link - EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY). Em resumo, se a onda eletromagnética se propaga através de um eter, então a velocidade da luz é relativa a este eter; sendo assim, referenciais inerciais com diferentes velocidades relativamente ao suposto eter devem medir velocidades diferentes para a onda eletromagnética, tal como no caso da onda sonora se propagando pela atmosfera. De fato o experimento de Michelson-Morley (posteriormente confirmado por vários outros experimentos) indicou que o eter – ou não existe ou produz algum efeito sobre os corpos com velocidade relativa a ele, não permitindo sua detecção experimental. Ele encontrou a mesma velocidade para a onda eletromagnética (luz) a partir de diferentes sistemas inerciais (ver o links relacionados acima).

A conclusão final é: Considere um único pulso eletromagnético (ou seja, de luz). A velocidade medida para a propagação deste pulso é sempre a mesma não importando a velocidade do medidor relativamente à fonte de luz. Desta forma, não existe referencial inercial privilegiado, logo não existe[1] um meio específico (eter) através do qual a luz se propaga.

Este resultado fundamenta uma importante característica para os referenciais inerciais. Que são todos

[1]Na verdade a primeira hipótese foi que o eter interagia com os materiais utilizados para realizar as medidas da velocidade da luz. Esta interação mudaria os comprimentos das “régua” utilizadas para medir distâncias, dependendo da velocidade da régua relativamente ao eter, impossibilitando uma medida correta da velocidade da luz e fazendo resultar sempre no mesmo valor. Esta hipótese foi abandonada e hoje considera-se que o eter não existe e que a velocidade da luz é uma grandeza absoluta da natureza.

equivalentes na descrição das leis físicas. Sendo assim, o postulado 1 está justificado.

O postulado 2 é consequência das evidências experimentais comentadas acima.

2 A relatividade do tempo e do espaço

De imetiato – após repetidas comprovações experimentais de que a luz viaja com mesma velocidade relativamente a qualquer referencial inercial, estando ou não em repouso com relação à fonte luminosa – a comunidade científica do final do século XIX e início do século XX se empenhou em buscar um formalismo físico e matemático que, diferentemente da mecânica Newtoniana, entrasse em concordância com os experimentos. Em suma, buscavam relações matemáticas capazes de manter a velocidade da luz tendo sempre o mesmo valor independente do referencial adotado. Hendrik Lorentz obteve as relações corretas em 1904.

2.1 As transformações de Lorentz

Historicamente, várias propostas surgiram após o experimento de Michelson-Morley a fim de explicar os seus resultados. Em 1889, o irlandês FitzGerald propôs a ocorrência da contração no comprimento dos materiais com velocidade relativa ao, até então assumido como existente, éter. Esta contração seria real, ou seja, uma aproximação interatômica devido a interação dos átomos que compõem o material com o éter. (? Porquê ele propôs isso?) Imaginem que utilizássemos uma régua para medir a distância percorrida pela luz em um determinado tempo,a fim de obter então sua velocidade c. Considerando a existência do éter, uma forma de a velocidade da luz ser a mesma em referenciais com diferentes velocidades relativamente ao éter seria que a régua utilizada na medida tivesse diferentes comprimentos dependendo de sua velocidade em relação ao éter. Se isso fosse verdade, então o fato do experimento mostrar a mesma velocidade para a luz em diferentes referenciais inerciais seria explicado pela impossibilidade de medirmos a velocidade usando uma régua com mesmo comprimento em todos os referenciais, o que obviamente, não retornaria valores reais para a velocidade calculada. Em resumo, esta proposta sugere uma impossibilidade no processo de medida. Lorentz propôs algo semelhante; ainda pensando no éter ele obteve suas equações de uma forma mais detalhada. Sua intenção foi de encontrar um conjunto de relações matemáticas cujas variáveis necessárias para cálculo de velocidade da luz se relacionassem de tal forma que impossibilitassem a detecção do éter e, como verificaremos, essas relações só são possíveis se além da contração do comprimento, ocorrer também a dilatação do tempo.

Procedimento De início o procedimento é extremamente simples. Devemos escrever o que foi observado nos experimentos de Michelson-Morley. Consideremos então dois sistemas de referência com velocidade relativa $\vec{u} = u_x\hat{i}$, como representamos na Figura 1.

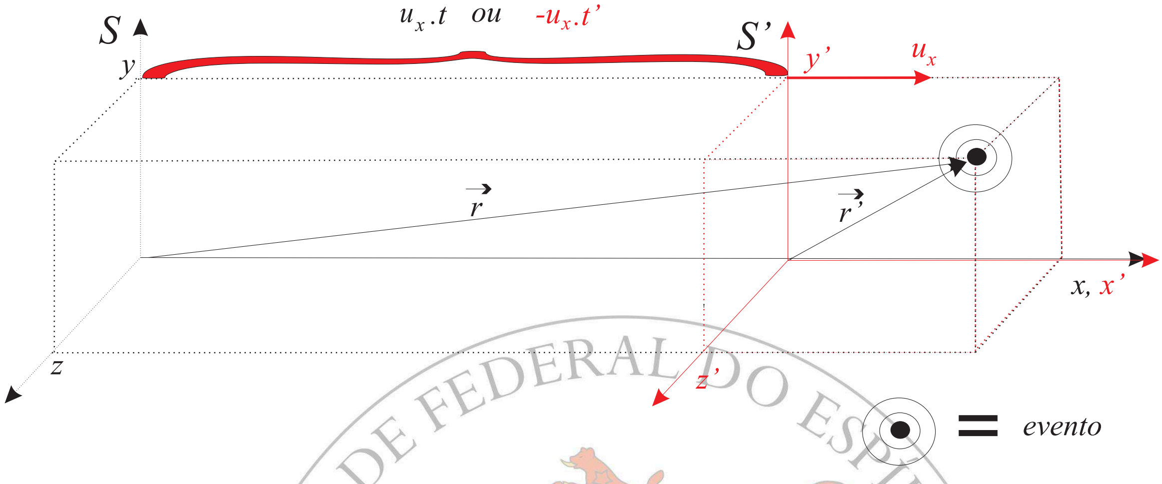

Figura 1: Referenciais S e S'

Queremos obter a transformação $(x,y,z,t) \Leftrightarrow (x',y',z',t')$, ou seja, se em um dos sistemas um dado evento ocorre em uma determinada posição e em um determinado momento, então em que posição e momento este mesmo evento é observado de outro referencial inercial?

Antes de iniciarmos a abordagem matemática que nos levará às transformações de Lorentz, vamos colocar a situação a ser tratada em uma forma apenas ilustrativa. Com isso podemos desenvolver alguma intuição.

Situação: Vamos considerar dois sistemas inerciais com velocidade relativa u_x como na Figura 1. Consideremos também que cada sistema conta com um arranjo de relógios sincronizados como ilustrado na Figura 2.

Da forma como a situação foi colocada na Figura 1, fica fácil concluir que os centros dos dois sistemas se sobrepõem quando $t = t' = 0$. Vamos supor então que um evento ocorra no centro comum dos sistemas neste instante; um evento do tipo um pulso de luz. A partir deste momento ($t = t' = 0$) vamos analisar como dois observadores situados um em cada centro de sistema observarão o pulso luminoso se afastando. Vamos chamar de João o observadof em S e de Maria o observador em S'.

Sendo assim, nossa análise tem de concordar com as observações de Michelson-Morley, que a luz

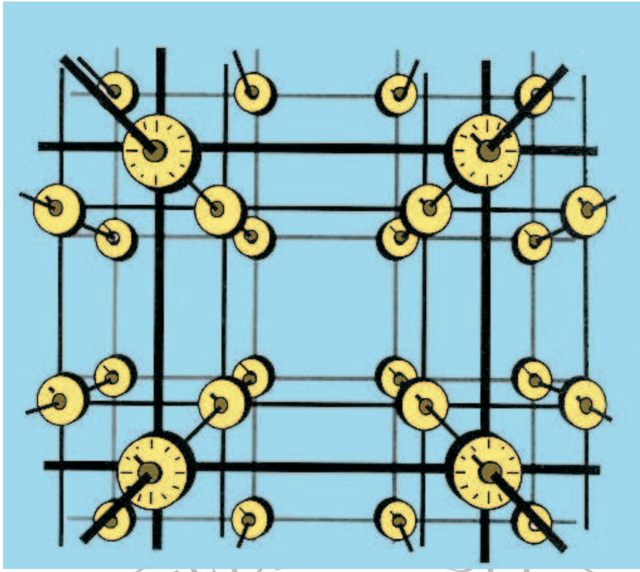

Figura 2: Relógios sincronizados e posicionados nos pontos coordenados.

se propaga com mesma velocidade independente do sistema referencial adotado. Isso quer dizer que tanto João quanto Maria observarão uma frente de onda esférica se afastando do centro, de seus respectivos referenciais, com velocidade c. A primeira ilustração que vem à mente, geralmente, é a colocada na Figura 3. Na Figura 3 representamos a visão de cada observador independentemente. Esta figura estaria correta se assumida do ponto de vista de Maria ou do ponto de vista de João, mas não se observada simultaneamente como na Figura. ? pq? Na realidade existe um único evento que é o pulso luminoso. Então existe, independentemente do sistema adotado, uma única frente de onda se propagando e não duas como a Figura nos induz a concluir (uma se afastando esfericamente de joão, círculos pretos, e outra se afastando esfericamente de Maria, círculos vermelhos). Não pode existir duas frentes de onda se propagando pois se isso ocorresse, um terceiro observador, por exemplo, longe do pulso luminoso seria alcançado por duas frentes de onda e concluiria que houveram dois eventos, quando na verdade houve apenas um – então esta configuração não é aceitável (veremos, mais a frente, que trata-se de uma impossibilidade de ilustrar uma situação correta de forma simultânea, pois um desenho ilustrativo é visto simultaneamente).

Como resolver a aparente contradição acima? Temos que obter uma forma de conciliar dois fatos; 1) O pulso de luz se afasta do centro com velocidade c nos dois referenciais (como colocado na Figura); 2) Só existe uma frente de onda (diferente do que está ilustrado na Figura).

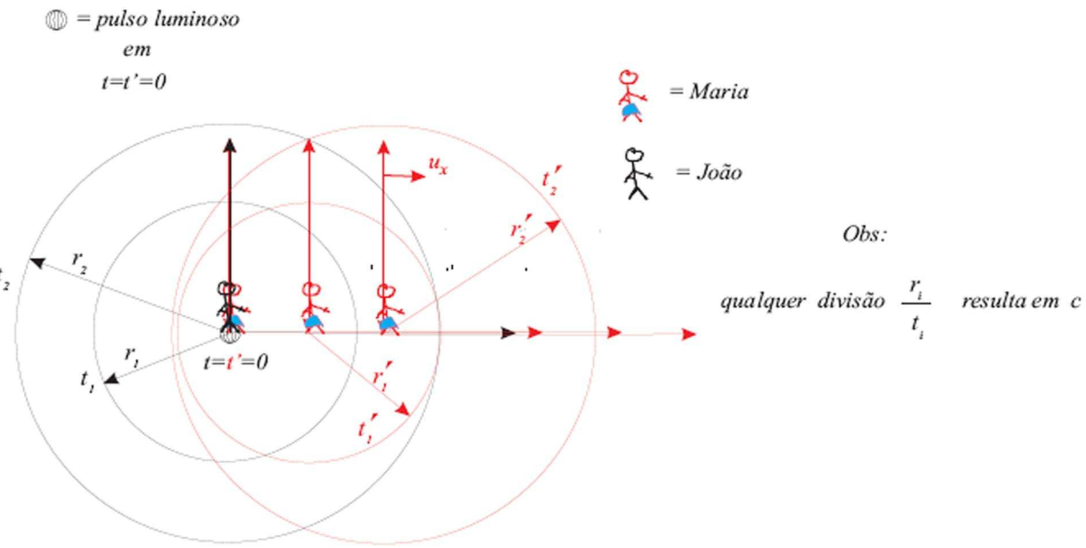

Figura 3: Luz emitida no instante em que os centros dos sistemas se superpõem. Com o passar do tempo (tanto em S quando em S') a onda se espande esfericamente, se afastando dos centros com uma velocidade que é c se medida de S ou se medida de S'.

Se existe uma única frente de onda, seria possível ilustrarmos esta situação em uma outra figura (corrigida em relação à Figura 3)? Vamos tentar e ver o que obtemos. Para isto escolheremos um dos sistemas refereciais para colocar a frente de onda e então analisaremos o que ocorre para o outro referente à mesma frente de onda. Vamos escolher Maria como referencial de observação "confiável"(onde a luz se afasta com velocidade c do centro visto por Maria). A figura ficaria, do ponto de vista de Maria, como ilustramos na Fig. 4. Esta situação está correta do ponto de vista de Maria, mas é fácil notar, em primeira análise, que algo não se encaixa bem para João. Observe que se traçarmos duas retas a partir de João, em diferentes direções até alcançarem a frente de onda, estas terão diferentes comprimentos. Seríamos levados a concluír que para João a onda se propaga com diferentes velocidades dependendo da direção observada. Mas isto não está em acordo com os experimentos de Michelson-Morley. Mais uma vez precisamos contornar esta aparente contradição – ? como?

Resposta: Não temos muitas opções onde procurar a resposta. Como é uma questão de cálculo de velocidade e sabemos que independente do sistema e da direção escolhida temos que obter um valor c; sabendo também que velocidade é obtida por um cálculo simples de $v = \Delta S/\Delta t$; então como $v = c = constante$ concluímos que as respostas estão nas variáveis ΔS e Δt. Transportando esta conclusão para as figuras, temos que pensar sobre as relações entre r_i e t_i, ou seja, nas relações de espaço e de tempo, pois como c não depende do referencial, então estas grandezas devem depender. Em suma,

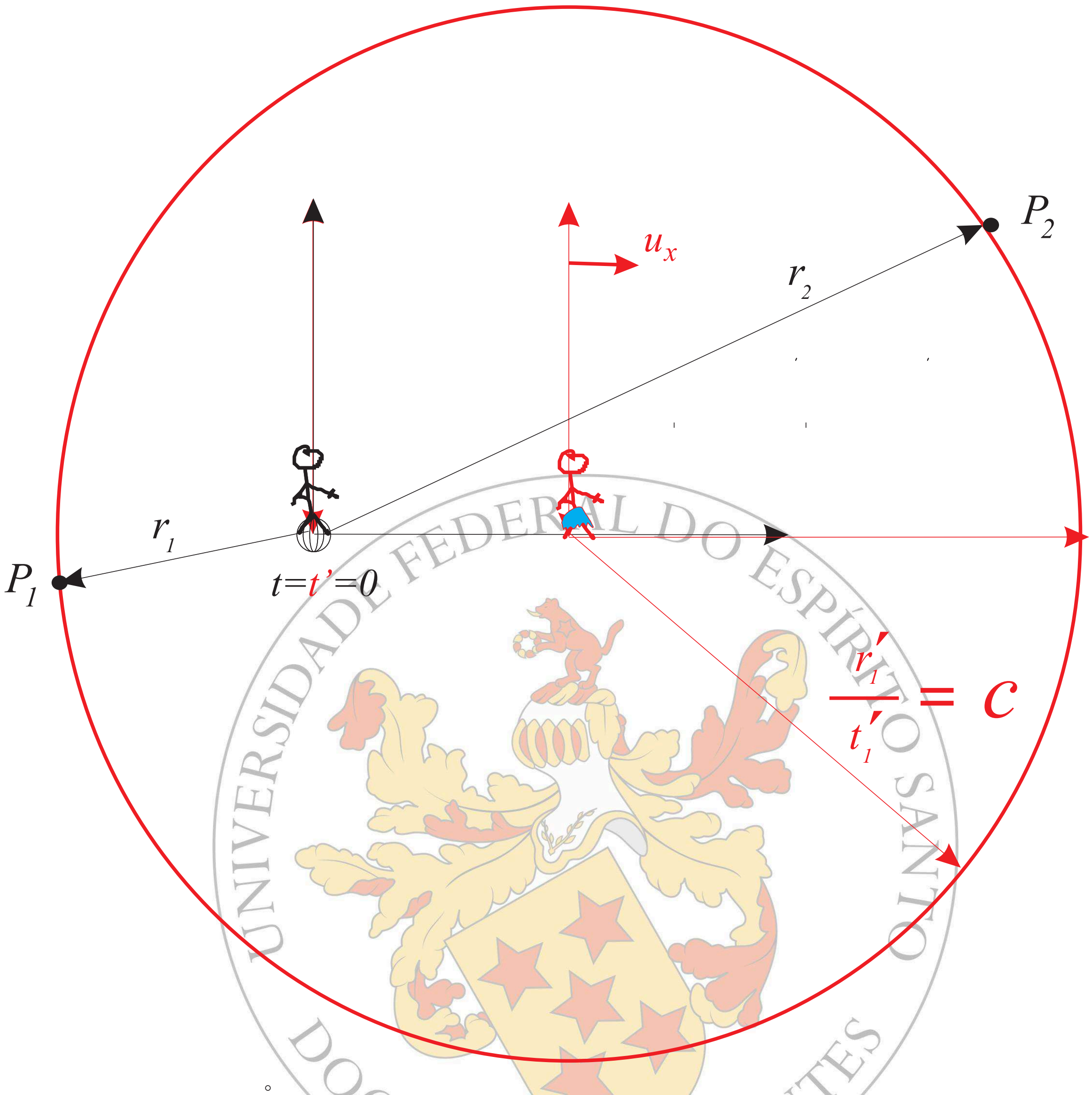

Figura 4: Considerando um único pulso luminoso do ponto de vista de Maria.

concluímos que dependendo do referencial adotado, as variáveis associadas com distância e tempo se ajustam de forma a retornar sempre o mesmo valor para a velocidade da luz independentemente do sistema escolhido ou da direção analisada.

Voltando à Figura 4, somos levados a concluír que r_1 ocorre em um tempo t_1 menor que t_2 associado com a frente de onda em r_2, tal que $r_1/t_1 = r_2/t_2 = c$. Do ponto de vista de Maria os pontos P_1 e P_2 são iluminados simultaneamente, pois estão a uma mesma distância do centro. Contudo, para João estes pontos são iluminados em momentos diferentes, concluímos então que o que é simultâneo para Maria não é simultâneo para João.

Por simetria, chegaríamos a uma conclusão análoga se escolhessemos o referencial de João para relacionar a propagação da onda. Obviamente, não é possível ilustrarmos em uma única figura uma situação que concorde com os postulados e com todos os observadores, visto que enxergamos a figura em um momento único, mas este momento único varia de referencial para referencial. Quero dizer com isso algo do tipo: Suponha que tenhamos uma máquina fotográfica especial capaz de fotografar a frente de onda luminosa (como se fosse uma onda na água). Como ficaria a foto? Seria uma frente de onda esférica em torno de Maria ou em torno de João? (considerando-os no centro do círculo); ou quem sabe não seria esférica? Com certeza seria uma onda esférica, mas seria esférica sempre no referencial onde se encontrar a máquina fotográfica, se esta estiver no referencial de maria, obteria em sua foto uma onda esférica em torno de Maria (ou seja, com Maria no centro); se estiver no referencial de João, uma onda esférica em torno de João (com João no centro). Se estiver em um terceiro referencial, obteria uma onda esférica neste terceiro referencial. Mas como vimos, isto não significa que existem muitas ondas esféricas se propagando pelo ar, pois o evento é único e esta situação pode ser contornada através das relações das coordenadas de espaço e de tempo "dilatando"ou "comprimindo"uma ou outra, de forma a retornar sempre c para velocidade da luz e também concordar com a existência de uma única frente de onda se propagando.

Após esta breve tentativa de intuir algo à respeito da transformações necessárias de serem realizadas de forma a concordar com observações experimentais, voltemos a uma abordagem mais técnica, a obtenção das relações matemáticas de Lorentz.

Antes de obtermos as relações de Lorentz, vamos utilizar os postulados da relatividade em situações menos gerais (mais simples) a fim de encontrarmos relações de tempo e espaço (distância).

2.1.1 Dilatação do Tempo

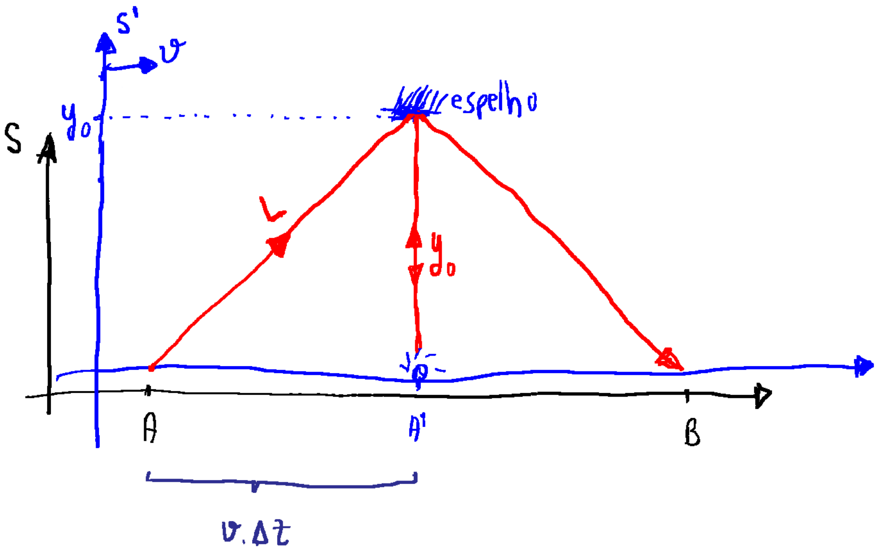

Figura 5: Sistemas referenciais inerciais S e S' com velocidade relativa v.

Vamos considerar a dinâmica representada na Fig.5. Um feixe de luz é acionado no sistema S', no ponto A'. Como sabemos, o pulso luminoso propaga em todas as direções, mas vamos nos ater somente ao feixe que vai em direção ao espelho situado em uma altura y_0 fixo em S' (ver Fig.5). Um observador fixo em S' (no ponto A') perceberá que o feixe de luz percorre uma distância y_0 em um tempo que ele medirá $\Delta t'/2$ (sendo $\Delta t'$ o tempo, medido em S', necessário para a luz ir e voltar ao ponto inicial); portanto medirá uma velocidade

$$c = \frac{y_0}{\Delta t'/2} \tag{1}$$

Por outro lado, um observador fixo no sistema S perceberá o pulso percorrendo uma distância L

em um tempo Δt medido em seu próprio relógio, afinal, S' está em movimento relativo à S. Este observador medirá uma velocidade

$$c = \frac{L}{\Delta t/2} \tag{2}$$

Através de uma relação triangular simples podemos relacionar L com y_0, resultando em

$$L = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \tag{3}$$

A Eq.(3) na Eq.(2) faz resultar em

$$c = \frac{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{\Delta t/2}. \tag{4}$$

Adicionalmente, da Eq.(1), temos que $y_0 = c\Delta t'/2$. Isto na Eq.(4) $\Rightarrow$

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t^2 = \frac{4}{c^2}\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \tag{5}$$

Define-se

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

como fator de Lorentz.

Análise Como a velocidade v possui valor máximo c, então $\Delta t > \Delta t'$ sempre. Mas o que isto significa fisicamente?

Resposta: Para responder corretamente esta pergunta, basta voltarmos na origem do problema e verificar o significado de $\Delta t'$ e de Δt. O que fizemos foi medir a distância temporal entre dois eventos que ocorreram no sistema S'. Fizemos esta medida no próprio sistema S', obtendo $\Delta t'$; e fizemos a partir do sistema S, onde obtivemos Δt. Δt ser maior que $\Delta t'$ equivale a dizermos, por exemplo, que se a distância temporal entre dois eventos ocorridos no sistema S' foi de 100 anos (nascer e morrer de uma pessoa, por exemplo); a distância temporal entre os mesmos dois eventos medidos a partir de S é maior que 100 anos (poderia ser, dependendo da velocidade relativa v, 200 anos, por exemplo). Equivale a dizer que o tempo passa mais lentamente em S' que em S, afinal, olhando de S, um homen que viveria 100 anos se estivesse em repouso relativamente à S, viveu 200 anos "simplesmente"por estar com velocidade relativa à S.

É importante enfatizar que este fato só é percebido pelo observador em S. Para o observador em S' (e todos que lá habitam) não sentem que suas vidas estão prolongadas. Afinal, se tudo pulsa mais lentamente (o relógio, o pulsar do coração, o sono, o acordar, a puberdade, a menopalsa, o intervalo de tempo que se sente fome, o tempo que uma flor demora para desabrochar, o intervalo de tempo entre duas batidas das asas de um beija flor, etc...) não se percebe nada diferente e se sente vivendo 100 anos (na verdade são 100 anos para S') só não parecem ser para S.

A situação é simétrica; como não há referencial privilegiado, se uma observação a partir de S de um pulso de luz ocorrido em S' levou à conclusão que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}, \tag{6}$$

então uma observação a partir de S' de um pulso de luz ocorrido em S levaria à conclusão de que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{7}$$

Em primeira reação intuitiva parece haver uma incoerência entre as Equações 6 e 7, afinal, parecem dizer coisas diferentes: A Eq.(6) diz que $\Delta t > \Delta t'$ sempre (pois $\gamma > 1$), enquanto que a Eq.(7) diz o contrário. Este paradoxo é "popularmente"conhecido como paradoxo dos gêmeos, que diz:

Dois irmãos gêmeos, Pedro e Paulo, vivem na terra. Pedro decide realizar uma viagem em uma espaçonave capaz de alcançar velocidades comparáveis com a da luz. Durante a viagem, Pedro se encontra em um referencial S', da espaçonave, enquanto que Paulo está em um referencial S, na terra. Para Paulo, seu tempo Δt é sempre maior que $\Delta t'$, e por consequência disso, quando voltar Pedro estará mais jovem que Paulo. Por outro lado, Para pedro em S', a equação válida para observar eventos em S é a Eq.(7), ou seja, Pedro percebe ao contrário; percebe o tempo de Paulo passando mais lentamente.

Sendo assim, quando Pedro voltar quem estará mais jovem?

Resposta: Vamos resolver este paradoxo em partes.

(a) A simetria é válida; então pode-se afirmar que o tempo de Pedro (espaçonave) passa mais lentamente quando medido por Paulo (da terra) e o tempo de Paulo (na terra) passa mais lentamente quando medido por Pedro (da espaçonave). Nestes casos não faz sentido falar em comparação pois estão em referenciais diferentes.

(b) Uma comparação efetiva só será possível quando Pedro voltar para a terra, para o referencial de paulo, onde serão comparados. Para isso, teremos a seguinte dinâmica: (i) Pedro e paulo estavam juntos na terra, (ii) Pedro saiu do referencial inercial terra, foi acelerado (passando por outros referenciais) até chegar no referencial espaçonave onde ficou por um tempo, (iii) para voltar, Pedro deverá desacelerar (passando novamente por outros referenciais) etc... até retornar a terra, onde poderá ser comparado.

(c) Note que nesta dinâmica, o sistema onde a comparação será feita é a terra. É onde Paulo sempre esteve sem passar em momento nenhum por referenciais intermediários. Então é neste sistema que as equações acima sempre foram válidas, e portanto, Paulo estará mais velho que Pedro.

Enfatizando: A situação acima, o paradoxo, só é importante para efeito de comparação. Para sistemas inerciais com velocidade relativa. As equações 6 e 7 são aplicadas com sucesso em seus respectivos referenciais, ou seja, enquanto a espaçonave estiver com velocidade constante em relação a terra Pedro perceberá o tempo de Paulo passando mais lentamente, enquanto que Paulo perceberá o contrário.

2.1.2 Contração do espaço

Na abordagem acima, um observador em S compara a o tempo entre dois eventos que ocorrem em um mesmo ponto no sistema S', pontanto, dois eventos separados apenas pela variável temporal em S'. Podemos nos perguntar se pode haver uma relação semelhante para dois eventos separados apenas pela variável espacial, ou seja, dois eventos simultâneos em S', mas separados pela posição. Seria equivalente à uma relação de distância entre duas extremidades de uma barra de comprimento L'.

"Explicação": Para uma barra rígida as duas extremidades estão simultaneamente em posições diferentes.

Vamos então considerar uma barra de comprimento L' em repouso relativo ao sistema S', e paralela ao eixo x' (ao longo da velocidade relativa entre S' e S, como ilustrado na Fig. 6). Como a velocidade relativa (v) é conhecida, um observador em S pode medir o comprimento da barra, em seu referencial, acionando um cronômetro quando passar pela extremidade x_2, desligando ao passar pela extremidade x_1 e utilizando a relação $v = \Delta S/\Delta t$. Assim temos

$$L = v\Delta t. \tag{8}$$

Observe que esta medida de diferentes posições em S' (extremidades da barra) foi realizada em uma única posição de S, o local onde se encontra o observador em S. Sendo assim, um observador em S' pode recorrer à Equação 7 para concluír que o comprimento L' é

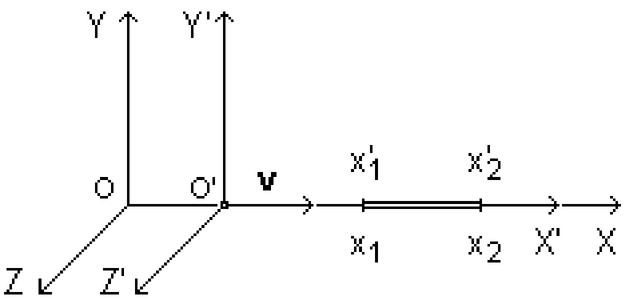

Figura 6: Barra fixa em S' com extremidades em x'_1 e x'_2

$$
\begin{aligned}
L' &= v\Delta t' \\
\Rightarrow L' &= v\gamma\Delta t. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Dividindo a Eq. 8 pela Eq. 9 temos

$$
\begin{aligned}
\frac{L}{L'} &= \frac{v\Delta t}{v\gamma\Delta t} \\
\Rightarrow L &= \frac{L'}{\gamma}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Ou seja, o comprimento de uma barra é medido menor quando esta barra possui velocidade relativa ao medidor.

2.1.3 Transformações completas de Lorentz

Desenvolvemos acima as relações de tempo e espaço entre dois referenciais com velocidade relativa v. Contudo, os casos acima correspondem a casos particulares e, historicamente, são consequência das transformações completas[2] de Lorentz.

[2]OBS: A palavra completas não é comumente utilizada. Aqui tem apenas a intenção de indicar que são as transformações gerais entre sistemas inerciais, para eventos separados por um intervalo de tempo Δt e uma distância ΔS.

A fim de obtermos as relações completas de Lorentz vamos considerar a situação mais geral possível; dois eventos (E_1 e E_2), em S', que ocorrem nos instantes t'_1 e t'_2 e nos pontos x'_1 e x'_2, respectivamente. Observe que esta situação é mais geral que as situações abordadas nas Seções 2.1.1 e 2.1.2. Na seção 2.1.1, para a dilatação do tempo, consideramos dois eventos separados por um intervalo de tempo mas que ocorrem no mesmo ponto do espaço (saída e volta do feixe luminoso). Na seção 2.1.2, contração do comprimento, consideramos dois eventos simultâneos (mesmo momento) em diferentes posições (extremidades da barra). Estas abordagem simplificaram a situação e nos mostraram relações de tempo apenas ou de espeço apenas. Nesta situação mais geral "tudo"é possível; Exemplo: Em S', com velocidade u relativa à S, ocorrem dois acontecimentos; um copo cai na posição $x'_1 = 10m$ e no momento $t'_1 = 20s$ e uma bomba explode na posição $x'_2 = -80m$ e $t'_2 = 300s$. Destes dados podemos determinar, no referencial S', a distância entre os dois eventos $\Delta L' = -90m$ e o intervalo de tempo entre eles $\Delta t' = 280s$.

Baseando-se no exemplo acima, qual seria a perguta a ser respondida? **A pergunta é:** Sabendo que um observador em S' mediu $\Delta L' = -90m$ e $\Delta t' = 280s$ entre os dois acontecimentos, o que mediria um outro observador em S para a distância ΔL e para o intervalo de tempo Δt entre estes mesmos dois acontecimentos?

Já vimos nas seções anteriores que os intervalos de tempo e de espaço são relativos. Mas será que a distância espacial pode influenciar na distância temporal medida de S? ; e será que a distância temporal entre dois eventos pode influenciar na distância entre os dois eventos medidos a partir de S?

Explicando melhor esta parte: Estou querendo dizer algo do tipo – Considere uma barra de comprimento $L' = 10m$ (em S'). Sento assim, como é um corpo rígido, se sua extremidade esquerda estiver na posição $x'_1 = 12m$ então a extremidade direita estará na posição $x'_2 = 22m$. Seu comprimento medido de S (supor velocidade relativa $v = 0,8c$) será, pela Equação 10,

$$L = \frac{L'}{\gamma},$$

$$L = 10\sqrt{1 - 0,8^2},$$

$$L = 6m.$$

Mas este resultado é para a barra rígida, ou seja, os dois eventos (duas extremidades) estão nas posições $x'_1 = 12m$ e $x'_2 = 22m$ simultaneamente. Se os dois eventos não fossem simultâneos, ou seja, um está em $x'_1 = 12m$ e o outro em $x'_2 = 22m$ em momentos diferentes, então é possível que que um observador em S não messa $6m$, apesar de continuarem com distância de $10m$ em S'.

Para responder estas perguntas precisamos das relações gerais entre S e S', as transformações de Lorentz.

Obtenção

Vamos, por motivos didáticos, utilizar os casos particulares obtidos nas Seções 2.1.1 e 2.1.2 no procedimento para a obtenção das transformações de Lorentz. Contudo, vale frisar que historicamente as equações de Lorentz foram apresentadas antes e os casos particulares são consequência delas.

2.1.4 Distância entre dois eventos medidos a partir de S como função da distância conhecida em S'.

Vamos então supor dois eventos, $E_1 = (x'_1, t'_1)$ e $E_2 = (x'_2, t'_2)$, ocorridos em S' com velocidade u relativa à S. Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, vamos escolher $x_1 = x'_1 = 0$ e $t_1 = t'_1 = 0$ (ou seja, o evento E_1 ocorre na origem e dos dois sistemas e no momento exato quando as origens se interceptam (momento em que os cronômetros são acionados). Sendo assim, resta esperar E_2 acontecer, medir $\Delta x' = x'_2 - 0 = x'_2$ e $\Delta t' = t'_2 - 0 = t'_2$, e encontrar (usando os resultados anteriores) os valores de $\Delta x = x_2 - 0 = x_2$ e $\Delta t = t_2 - 0 = t_2$.

A situação idealizada acima está ilustrada na Fig.7

Nesta abordagem o evento E_1 serve apenas para marcar o acionamento do cronômetro. Estamos interessados, na verdade, no evento E_2. Queremos saber: Se um evento ocorre em um momento qualquer t'_2, após $t = t' - 0$, em uma posição x'_2, então em que momento t_2, após $t = 0$, e em que posição x_2 o referido evento ocorreu?

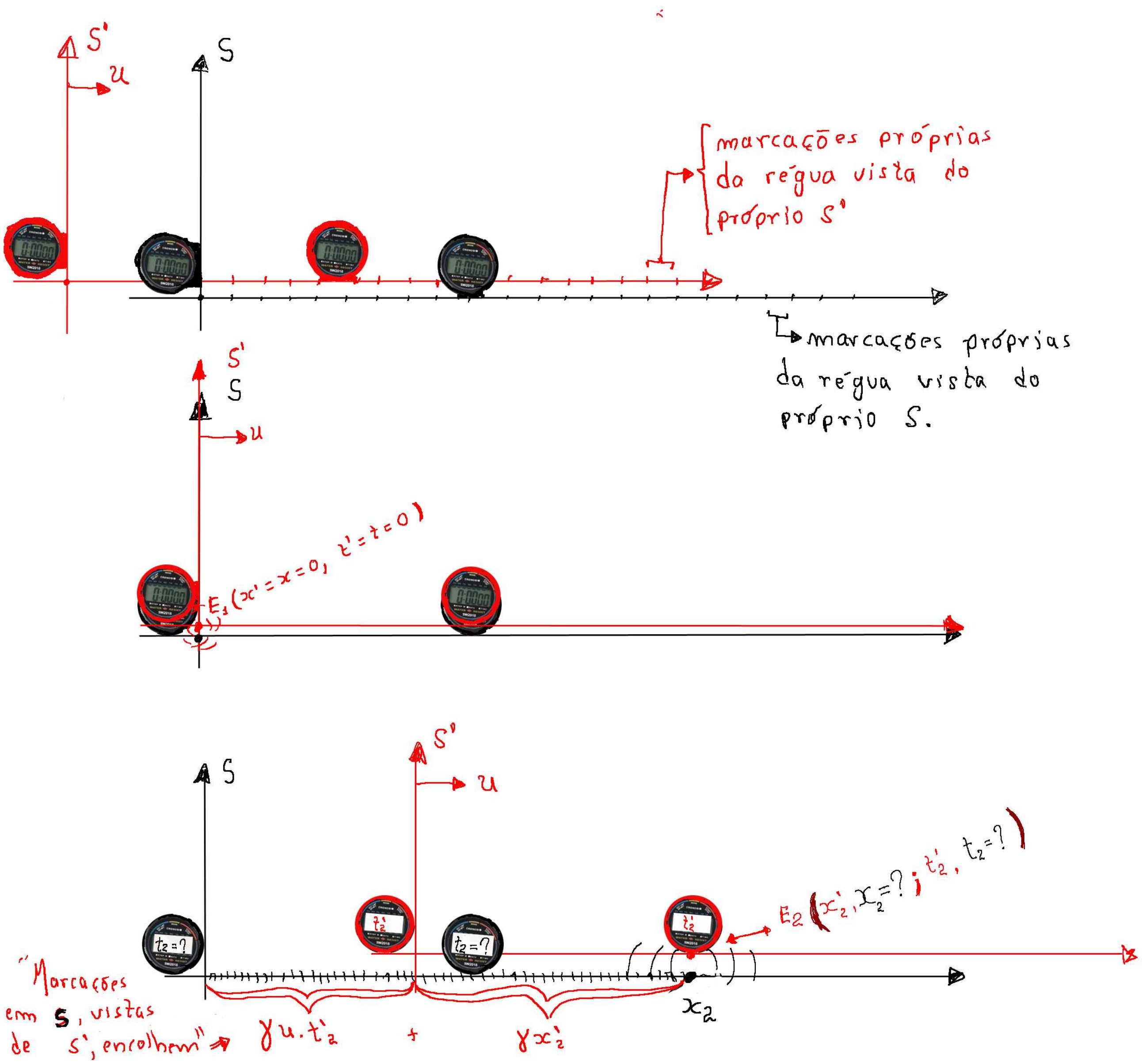

Figura 7: Referenciais S e S' com velocidade u relativa à S. O evento E_1 ocorre na origem e no momento em que elas cruzam, quando os cronômetros são acionados. O Evento E_2 ocorre em t'_2 e no ponto x'_2. A tarefa é encontrar os valores de t_2 e x_2, os quais são percebidos pelo observador em S, e colocar estes valores como função de x'_2 e t'_2. As marcações próprias de uma régua encolhem (pelo fator γ) se vistas de outro referencial, o que faz resultar em uma leitura maior para a coordenada x_2 quando feita pelo observador em S'. Desta forma, o evento dois ocorre em x_2 dado por $\boldsymbol{x}_2 = \gamma(x'_2 + ut'_2)$.

Quando um evento ocorre (no caso E_2) a mesma imagem local é levada a qualquer observador em qualquer sistema referencial. A imagem local "fotografa"as marcações das réguas nos dois sistemas e também os relógios posicionados no local do evento [3]. Desta forma, um observador em S' enxerga tudo, as marcações das duas réguas e também dos dois relógios.

Pela Equação 10, uma régua encolhe quando observada de outro referencial com velocidade relativa. No caso ilustrado na Fig.7, olhando de S' a régua em S encolhe. Esta aproximação das marcações faz com que a leitura retorne um valor maior para x_2, crescido pelo fator γ. Este fato, mais o fato de que quando o evento dois ocorrer o sistema S' já avançou uma quantidade ut_2', que por motivos análogos é acrescido pelo fator γ, resulta que

$$x_2 = \gamma(x_2' + ut_2') \tag{11}$$

A Eq. 11 é uma transformação de Lorentz de S' para S, para a posição de um evento. Excluíndo o índice 2, a fim de generalizarmos o evento dois como sendo um evento qualquer após $O = O'$ em $t_1 = t_1' = 0$, reescrevemos na forma tradicional

$$x = \gamma(x' + ut'). \tag{12}$$

2.1.5 Relação temporal

OBS: Lembrar que os relógios são sincronizados em cada referencial, mas evoluem com velocidades diferentes quando observados de outro referencial; isto é: Olhando de i para um referencial $j \Rightarrow \Delta t_i = \gamma \Delta t_j$.

Dentre várias possibilidades de abordarmos este problema, vou (vamos) optar por uma abordagem incomum, porém com ferramental matemático bastante básico.

Abordagem: Vamos usar o fato de que um observador em S' observa a luz proveniente de um dado

[3]Vale lembrar que cada sistema contem um emaranhado de réguas e relógios, sendo que o conjunto de relógios associados a cada sistema, etá sincronizado

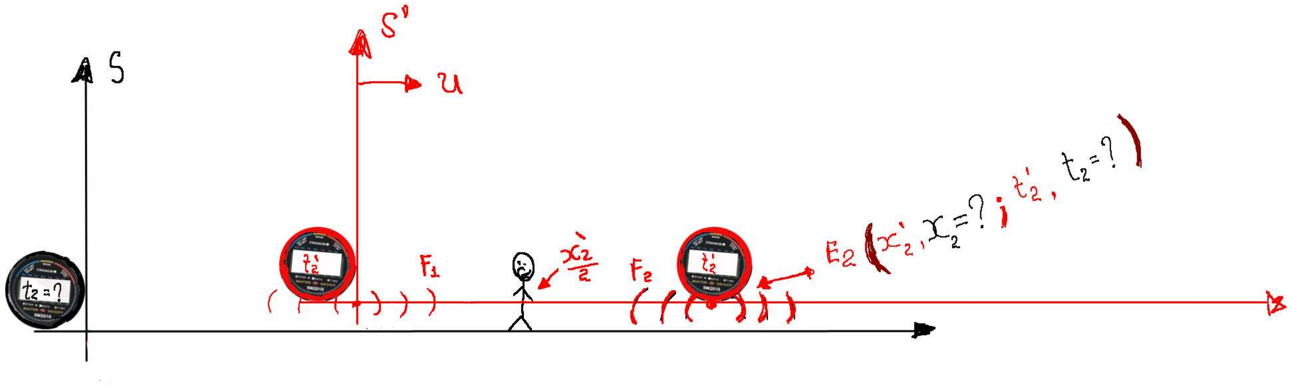

Figura 8: O Observador em S foi estrategicamente posicionado em $x = x_2'/2$ no momento de ocorrência dos eventos em t_2'. Como as origens foram sincronizadas em $t = t' = 0$, então o evendo em t_2' ocorrido na origem será percebido em $t_{2,0} = \gamma t_2'$. Porém, o evento em t_2' ocorrido em x_2' será percebido mais tarde em um tempo $t_2 = t_{2,0} + \Delta t$, afinal o observador em S encontra a frente de onda F_1 antes da frente de onda F_2. Como o observador estava no ponto média no momento da ocorrência simultânia para S', então isso só será possível se o evento em x_2' ocorrer mais tarde se medido de S.

evento se aproximar com velocidade c; também que um observador fixo em S fica para trás com velocidade $-u$. A partir destes fatos, o observador em S' pode medir o intervalo de tempo entre os encontros dos eventos E_1 e E_2 ($\Delta t'$) com o observador em S. [4] Adicionalmente, vamos considerar que no momento t_2', dois eventos simultâneos ocorrem em S', um em x_2' e outro na origem O'.

Queremos então saber: Em que momento ocorre o evento $(x_2'.t-2')$, para um observador em S?

A situação idealizada acima está ilustrada na Fig. 8.

Como está explicado na própria Figura 8, temos que

$$t_2 = t_{2,0} + \Delta t$$

Mas $t_{2,0} = \gamma t_2'$, resultando em

$$t_2 = \gamma t_2' + \Delta t \tag{13}$$

[4] Isso pode ser feito de forma simples igualando as equações de movimento para as frentes de onda com as equações de movimento do observador S.

Obtenção de Δt: Como colocamos acima, vamos obter o intervalo de tempo $\Delta t'$ observado pelo observador em S' para os encontros do observador em S com as frentes de onda F_1 e F_2. Como "estamos"observando S a partir de S', temos que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{14}$$

Obtenção algébrica através das equações de movimento do observados e das frentes de onda F_1 e F_2.

Para o observador em S' a equação de movimento do observador em S é dada por

$$x'_{O_S} = \frac{x'_2}{2} - ut'. \tag{15}$$

A equação de movimento da frente de onda F_1 é dada por

$$x'_{F_1} = ct'. \tag{16}$$

A equação de movimento da frente de onda F_2 é dado por

$$x'_{F_2} = x'_2 - ct'. \tag{17}$$

Assim, o encontro entre O_S e F_1 ocorre no tempo t'_1 para o qual

$$x'_{O_S} = x'_{F_1}, \tag{18}$$

e o encontro entre O_S e F_2 ocorre no tempo t'_2 para o qual

$$x'_{O_S} = x'h_{F_2},. \tag{19}$$

Através de uma álgebra bastante simples chega-se à $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ como mostramos na Fig.9.

Utilizando agora a relação 14 temos o resultado para Δt mostrado na Fig.10

Segue da relação 13, juntamente com o resultado final apresentado na Fig.10 que

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2}. \tag{20}$$

Eliminando o índice 2, reescrevemos na forma tradicional

$$t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}. \tag{21}$$

2.1.6 Comprimentos perpendiculares à direção da velocidade relativa

Se dois eventos ocorrem simultaneamente em S', por exemplo, definindo um comprimento entre os eventos de L', então quando seria o comprimento L se L' é perpendicular à velocidade relativa u?

Observe na Fig.11, que as frentes de onda chegam ao mesmo tempo tanto para o observador em S' quanto para o observador em S (ambos situados no ponto médio). Neste caso não temos, como tínhamos no movimento longitudinal, tempos diferentes de observação entre as frentes de onda provenientes dos dois pontos; ou seja, não temos nenhum termo dependente da posição que possa diferenciar os dois eventos para um ou para outro observador. Em outras palavras, temos uma situação totalmente simétrica entre os observadores tanto quanto ao momento de observação das extremidades quando das coordenadas "fotografadas"na extremidade. Sendo assim, nenhum observador possui qualquer

$$x'_{0S} = x'_{F1}$$

$$\frac{x'_2}{2} - u t'_1 = c t'_1$$

$$t'_1 = \frac{x'_2}{2(c+u)}$$

$$t'_1 = \frac{x'_2}{2.c\left(1+\frac{u}{c}\right)}$$

$$x'_{0S} = x'_{F2}$$

$$\frac{x'_2}{2} - u t'_2 = x'_2 - c t'_2$$

$$t'_2 = \frac{x'_2}{2(c-u)}$$

$$t'_2 = \frac{x'_2}{2c\left(1-\frac{u}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{x'_2}{2c}\left[\frac{1}{1-\frac{u}{c}} - \frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right]$$

$$\Delta t' = \frac{x'_2}{2c} \cdot \left[\frac{\cancel{1} + u/c - \cancel{1} + u/c}{1 - u^2/c^2}\right]$$

$$\Delta t' = \frac{x'_2}{\cancel{2}c} \cdot \frac{\cancel{2}u/c}{1 - u^2/c^2} = \frac{x'_2}{c^2} \cdot \frac{u}{1 - u^2/c^2}$$

Figura 9: Abertura dos cálculos para $\Delta t'$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \Delta t' . \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{x_2'}{c^2} . \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} . \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{u x_2'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} . c^2} = \gamma \frac{u x_2'}{c^2}$$

Figura 10: Contas chegando à Δt, a fim de obtermos $t_2 = \gamma t_2' + \Delta t$.

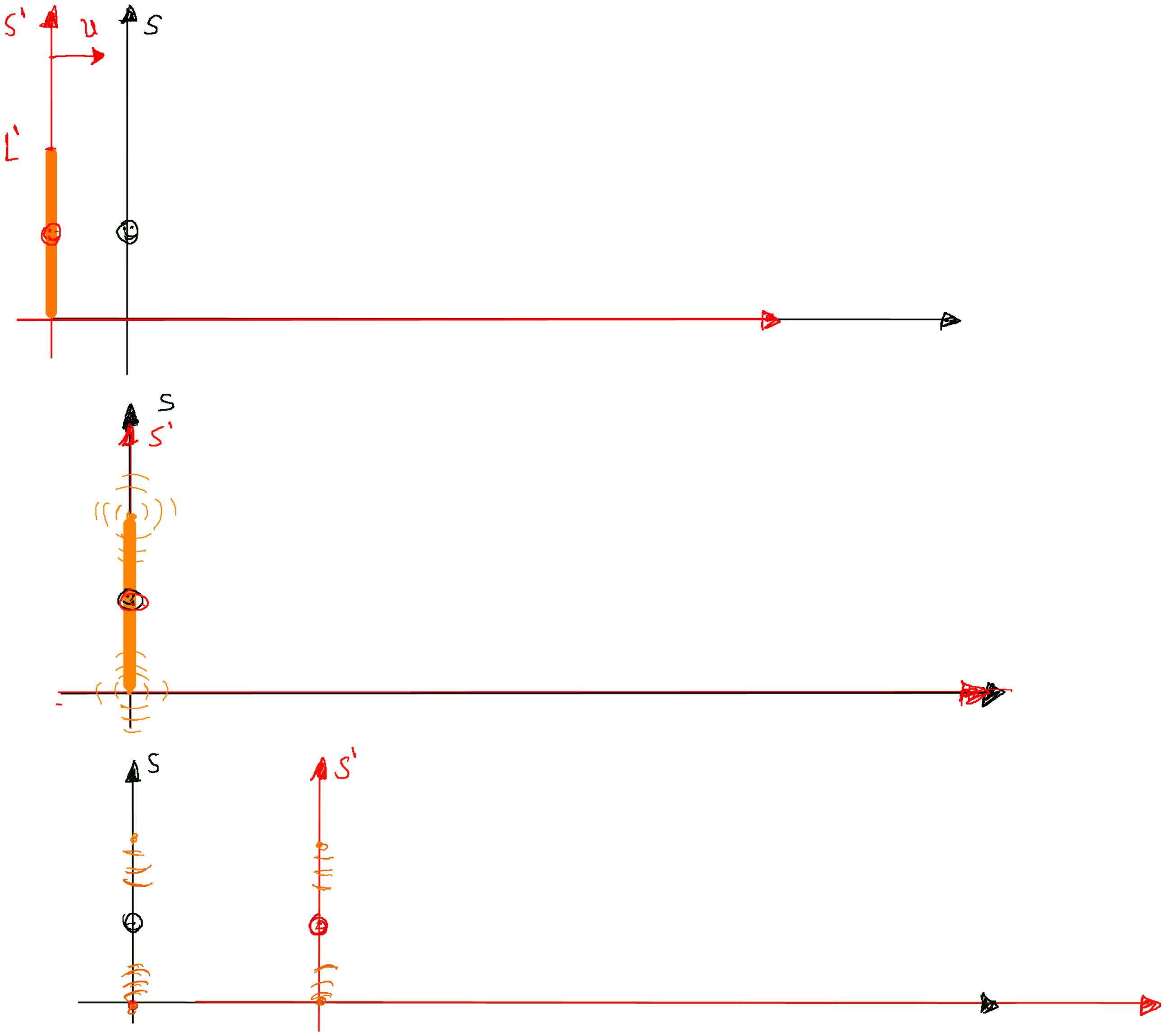

Figura 11: Movimento relativo entre S' e S, para análise dos comprimentos perpendiculares à velocidade.

privilégio em relação ao outro, tal que não podem chegar à conclusões diferentes. Esta simetria nos leva a que

$$y = y \tag{22}$$

$$z = z' \tag{23}$$

Finalmente podemos sumarizar as equações de Lotentz como

$$x = \gamma(x' + ut') \tag{24}$$

$$y = y' \tag{25}$$

$$z = z' \tag{26}$$

$$t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}). \tag{27}$$

Aplicando as equações de Lorentz em dois pontos $x_2\left(x'_2, t'_2\right)$ e $t_2\left(x'_2, t'_2\right)$ e $x_1\left(x'_1, t'_1\right)$ e $t_1\left(x'_1, t'_1\right)$, a subração faz resultar em

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \tag{28}$$

$$\Delta y = \Delta y' \tag{29}$$

$$\Delta z = \Delta z' \tag{30}$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}). \tag{31}$$

3 Extendendo a nova cinemática para uma nova dinâmica (newtoniana – relativística)

Como resultado da reformulação da cinemática newtoniana, baseada nas transformações de Galileu, somos levados distribuir estas novas informações (transformações de Lorentz) para as demais relações newtonianas (como momento linear, energia cinética, etc.). Notadamente, como a mecânica newtoniana sobreviveu (e sobrevive) por algumas centenas de anos com grande sucesso e ainda é utilizada para aplicações diárias, esperamos que a nova mecânica relativística se reduza à mecânica newtoniana quando aplicada a experimentos com baixas velocidades relativamente à velocidade da luz.

Entretanto, do ponto de vista relativístico temos que considerar um detalhe, em particular, a mais relativamente ao conceito clássico adotado na mecânica clássica newtoniana, onde as interações entre partículas ficam inteiramente definidas de forma instantânea em função de suas posições relativas; como se a interação entre dois corpos fosse instantânea. Para velocidades $v << c$ é realmente o que percebemos.

Na abordagem relativística o conceito de interação instantânea não pode ser adotado, afinal, por exemplo, as distâncias relativas entre partículas dependem do referencial adotado.

Procedimento: Basicamente vamos repetir os passos de Isac Newton a fim de obtermos as relações de grandezas como momento linear e energia cinética. Essas grandezas não podem ser demonstradas, elas são definidas de forma heurística e de forma a concordarem com experimentos prévios, bem como prevendo, como sucesso, novos experimentos. Tratemos então da grandeza quantidade de movimento, ou equivalentemente, momento linear.

3.1 Momento Relativístico

Momento linear: O que é momento linear? É de experiência diária que um objeto O_1 possuindo uma massa inercial de repouso $m_{0,1}$ e uma velocidade inicial $(v_i << c) = v_{i,1}$ transmite, ao chocar-se com um O_2 de massa $m_{0,2}$ e $v_{i,2}$, parte de sua velocidade para O_2 alterando as duas velocidades para seus respectivos valores finais $v_{f,1}$ e $v_{f,2}$. Classicamente a quantidade $Q = m_{0,1}.v_{i,1} + m_{0,2}.v_{i,2}$ é conservada após a colisão, como prevê Newton. É natural que tentemos algo semelhante para $v \approx c$, ou seja, relativisticamente. Vamos trabalhar, de forma equivalente, com o produto das grandezas massa e velocidade e, como dito anteriormente, vamos considerar as relações de Lorentz, os postulados da relatividade e também que as novas relações (possivelmente novas) se reduzam ao caso esperado para $v << c$.

Na mecânica newtoniana o momento de uma partícula é definido por

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{32}$$

Na Equação 32 admíte-se que m é uma grandeza invariável da partícula. Geralmente m é medida, por simplicidade, quando a partícula está em repouso relativamente ao referencial utilizado para estudar a dinâmica (laboratório). $\vec{v}$ é a velocidade e por definição é uma medida dinâmica, só dependendo, para o observador no laboratório, quanto tempo a partícula gasta para percorrer um determinado espaço. Vamos prover maior generalidade na abordagem relativística deixando a massa m depender da velocidade ($m \rightarrow m(\vec{v})$); afinal, como a forma de um objeto muda dependendo de sua velocidade (contração de Lorentz) e uma determinada quantidade de energia fornecida a uma partícula (como demonstrado experimentalmente) não é totalmente convertida em variação de velocidade, então uma possibilidade é a ocorrência na variação da massa como função da velocidade. Mantendo a forma mais simples e próxima do formato clássico, assumimos então que o momento relativístico pode ser escrito na forma

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} \tag{33}$$

Prosseguindo, temos então de responder algumas perguntas. Será que m depende realmente de v? – Se depende, como seria esta dependência?

Neste ponto temos de definir um objetivo final, um resultado que desejamos alcançar. Parece coerente definirmos como resultado desejável a conservação de momento relativístico. Se esta conservação

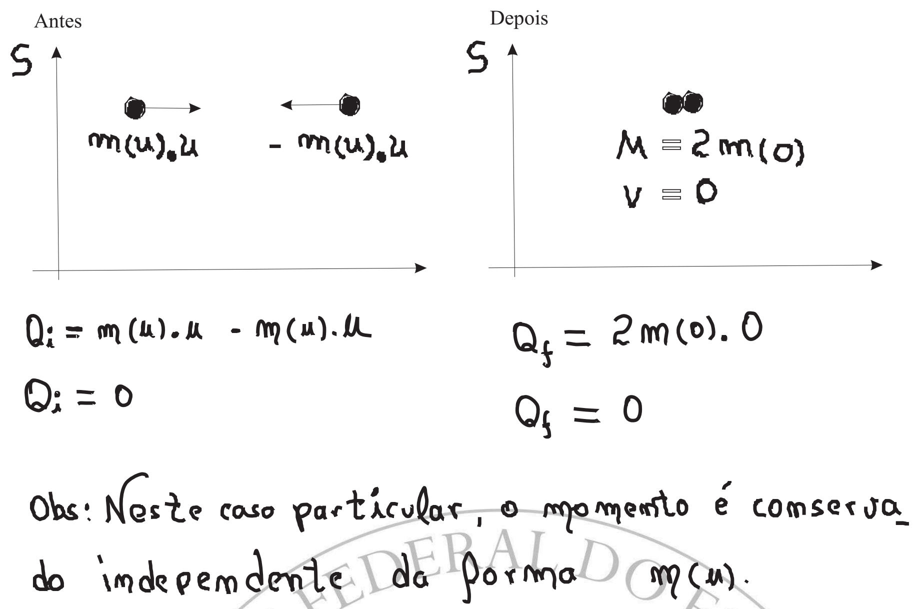

Figura 12: Antes e após a colisão com velocidades relativas à S

ocorre ou não, os experimentos podem, posteriormente, nos auxiliar na confirmação desta hipótese. Assumindo-a como verdadeira podemos forçar a condição de conservação a fim de obtermos a forma matemática para $m(v)$. Vamos então, considerar um experimento de colisão entre duas partículas. Nosso procedimento será simplificado se considerarmos uma situação simétrica. Consideremos então que duas partículas com mesma massa de repouso m_0 possuam, relativamente a um referencial S', velocidades iniciais $\vec{u}_{i,1} = u_{i,x}\hat{i}'$ para a partícula P_1 e $\vec{u}_{i,2} = -u_{i,x}$ para a partícula P_1. Vamos considerar também uma colisão perfeitamente elástica (as partículas permanecem grudadas após a colisão).

Como está claramente ilustrado na Fig. 12, para esta situação particular (simetria no movimento das duas partículas em relação ao referencial S'), o momento é conservado sem a necessidade do conhecimento da forma $m(u)$.

Vamos então analisar o mesmo experimento de um outro referencial inercial S', onde existam velocidades não nulas antes e depois da colisão. Dentre as infinitas possibilidades de escolha para S' vamos, por simplicidade, escolher um referencial que minimize os cálculos matemáticos. Vamos (e isso foi determinado após algumas tentativas) escolher o referencial da partícula com velocidade negativa. Sendo assim o experimento, do ponto de vista de S' fica como ilustrado na Fig. 13

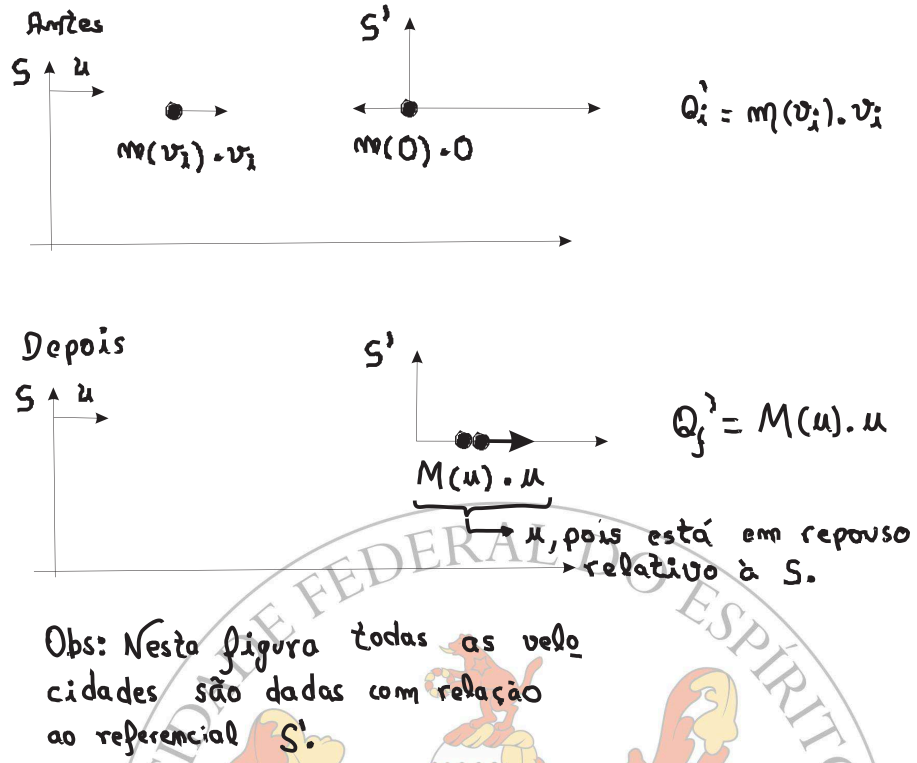

Figura 13: Antes e após a colisão com todas as velocidade dadas com relação à S’

Da Fig. 13, e pelo desejo de que o momento se conserve, queremos que $Q'_i = Q'_f$, assim temos

$$m(v_i).v_i = M(u).u \tag{34}$$

Retomando o foco O que estamos buscando mesmo?

Estamos inferindo a conservação de energia relativística a fim de encontrarmos a relação $m(v)$ que a possibilite.

v_i pode ser obtida através da transformação de velocidade relativística, já estudado. Por fim, precisamos colocar $M(u)$ como função de variáveis conhecidade (massas individuais de repouso e/ou como função da velocidade). Vamos impor então a conservação de massa relativística dada por

$$M(u) = m(v_i) + m_0 \tag{35}$$

A Equação 35, que é relativa ao referencial S', "diz"que a massa total do sistema é conservada. Inserindo a relação 35 na Equação 34 temos que

$$m(v_i).v_i = m(v_i).u + m(0).u \tag{36}$$

$$\frac{m(v_i)}{m(0)} = \frac{u}{v_i + u} \tag{37}$$

transformando v_i através do sistema S temos

$$v_i = \frac{u+u}{1+\frac{u.u}{c^2}} \qquad \text{então } m(v_i) \rightarrow m(u)$$

Com mais um pouco de algebra, chega-se em

$$m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{38}$$

Com este resultado podemos afirmar que o momento linear se conserva se

$$\vec{P}_{relativistico} = \frac{m(0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.u \tag{39}$$

Sendo $m(0)$ a massa de repouso.